Ma
152 c

Geometrische Constructionslehre

oder

darstellende Geometrie.

(Géométrie descriptive.)

Von

G. Schaffnit,

Capitain in der Großh. Heſſ. Artillerie, Lehrer der Mathematik und Phyſik an der Großh. Militairſchule, Ritter erſter Klaſſe des Großh. Heſſ. Ludewigordens und Mitglied der Ehrenlegion.

Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage.

Mit neun Kupfertafeln.

Darmſtadt, 1837.

Verlag von Joh. Wilh. Heyer's Verlagsbuchhandlung.

KÖNIGL. BAYER. BIBLIOTHEK. BAMBERG

Seinem

verehrten Lehrer,

dem Herrn

Friederich Scholl,

Major in der Großh. Hess. Artillerie, Lehrer der Kriegswissenschaften an der Großh. Militairschule, Commandeur des Großh. Hess. Ludewigordens und Ritter des Königlich französischen Ordens der Ehrenlegion

widmet dieses Werkchen

als einen Beweis seiner Hochachtung

der Verfasser.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Seit Erscheinung der ersten Auflage dieses Werkchens haben in Deutschland die Gewerbe einen erfreulichen Aufschwung begonnen und die gleichzeitige Errichtung von Realschulen an vielen Orten zeigt, daß man die große Wichtigkeit und Unentbehrlichkeit dieser Schulen für die Gewerbe erkannt hat. Da nun die darstellende Geometrie ein Hauptlehrzweig dieser Schulen ist, so war es ziemlich natürlich, daß in der neuesten Zeit mehrere Werke über jenen Theil der Geometrie ans Licht traten, und das Bedürfniß einer zweiten Auflage des gegenwärtigen Werkchens, als eines der ersten Bücher, welche in Deutschland über geometrische Constructionslehre erschienen sind, hat wohl darin hauptsächlich seinen Grund.

Die vorliegenden Bogen sind nicht weniger zum Selbststudium, als zum Leitfaden bei dem Vortrage der darstellenden Geometrie bestimmt. Sollten sie unter besonderen Verhältnissen für den ersten Anfänger noch zu viel enthalten, so wird es dem Lehrer

leicht sein, einen Theil der Aufgaben wegzulassen, ohne daß der Zusammenhang allzusehr unterbrochen wird. Indessen darf nicht übersehen werden und die häufig citirten §§. zeigen es hinreichend, daß Aufgaben, welche scheinbar gar nicht ins Leben eingreifen, dennoch nicht übergangen werden dürfen, theils weil sie den Auflösungen anderer zur Grundlage dienen, theils auch des Werthes wegen, den sie als formales Bildungsmittel haben.

Die zuweilen aufgeworfenen Fragen und die an passenden Stellen eingestreuten Uebungsaufgaben sollen dem Anfänger Gelegenheit geben, seine Kräfte zu versuchen, seine bereits erworbenen Kenntnisse zu prüfen und auf Gegenstände des Lebens anzuwenden.

Die Erfahrung, welche ich während des Vortrags der geometrischen Constructionslehre in der Großh. Hess. Militärschule gemacht habe, hat mich überzeugt, daß nichts so sehr geeignet ist, den Schülern das Studium dieses Theils der Geometrie zu erleichtern, als möglichst viele Sätze und Aufgaben mittelst Draht und Pappe zu versinnlichen. Hierdurch wird manchem Schüler oft in einer Viertelstunde mehr klar, als ohne diese Hülfsmittel in einigen Stunden. Dergleichen Apparate sollten daher bei keinem Vortrage fehlen und jede Schule sollte eine Sammlung derselben besitzen. Der Schüler aber unterlasse seinerseits nicht, die Aufgaben selbst auf dem Papiere aufzulösen, dabei in einem großen

Maßstabe zu zeichnen, so wie zur Bezeichnung der verschiedenartigen Linien verschiedene Farben zu nehmen und dieselbe Farbe für Linien derselben Art beständig beizubehalten; er zeichne jede Figur auf ein besonderes Blatt, gebe allen Blättern einerlei Größe und er wird sich nach Beendigung des Cursus im Besitze einer ihm sehr werthen Sammlung sehen. Will der Anfänger diese Uebungen mit Nutzen treiben, so muß er, nachdem er die Figur nach dem Original gezeichnet hat, den gegebenen Stücken der Aufgaben absichtlich eine andere Lage gegen einander und gegen die Basis geben, als es in den Kupfertafeln der Fall ist; er wird dabei nicht selten in Verlegenheit kommen, wenn er nur nachgemacht hatte und nicht auch in den Geist der Auflösung eingedrungen war. Ferner suche der Schüler zu den Auflösungen ohne Figuren die entsprechenden Figuren zu zeichnen.

Die Einrichtung des Werkchens ist noch dieselbe, wie bei der ersten Auflage; dagegen manches geändert, gestrichen und hinzugefügt worden, so daß ich glaube, die zweite Auflage mit Recht eine verbesserte und vermehrte nennen zu dürfen. Namentlich ist die Zahl der Uebungsaufgaben vermehrt worden und ein zwölfter Abschnitt, die Grundzüge der Perspective, als weitere Anwendung der descriptiven Geometrie, enthaltend, sammt einer dazu gehörigen Kupfertafel hinzugekommen. Die übrigen Tafeln sind mit einigen neuen Figuren vermehrt und stär-

ker gravirt worden, als es bei der ersten Auflage der Fall war. Das etwas größere Format ist die Ursache, weßhalb die Seitenzahl nicht mehr zugenommen hat.

Neue Beweise und Aufgaben, so wie neue und kürzere Auflösungen bekannter Aufgaben wird man nicht vermissen.

Gründliche Beurtheilungen meiner Arbeit werden mir nur angenehm sein.

Darmstadt im November 1836.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniß.

Einleitung.

Seite

§. 1. 2. Gegenstand, Wesen und Zweck der darstellenden Geometrie 1

3. Ueber die Bestimmung der Lage eines Punktes im Raume 3

Erster Abschnitt.

Erklärungen. Bestimmung der Lage eines Punktes, einer Linie, einer Fläche und eines Körpers im Allgemeinen, mit Hülfe der Projectionen.

4. 5. Projection eines Punktes; Projectionsebenen . 5.

6—9. Projection einer Linie; projicirende Fläche . 6.

10—12. Darstellung der Flächen und Körper im Allgemeinen; Tracen . . . . 7.

13—15. Nähere Betrachtung der Projectionsebenen; Basis 8.

16. Grundriß, Aufriß . . . . . 10.

17. Bezeichnungsart . . . . 11.

Zweiter Abschnitt.

Betrachtung eines Punktes, einer geraden Linie und einer Ebene in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen. Aufgaben.

18. Die Projectionen eines Punktes liegen in einer geraden auf der Basis senkrechten Linie . . 12.

19. Sätze in Bezug auf die Lage eines Punktes . 12.

Seite

20. Sätze in Bezug auf die Lage einer Geraden . 13.
21. Sätze in Bezug auf die Lage einer Ebene . 16.
22. Wenn ein Punkt einer geraden Linie irgend einen aliquoten Theil derselben abschneidet, so schneiden die Projectionen dieses Punktes dieselben aliquoten Theile von den Projectionen der Linie ab . . 18.
23—25. Betrachtung eines Punktes und einer Linie in einer sich drehenden Ebene . . . 18.
26. Eine im Raume befindliche Linie in eine Projectionsebene umzulegen . . . . 20.
27. Wie man aus den gewöhnlichen Projectionen eines Punktes ꝛc. die Projectionen auf einer beliebigen Vertikalebene erhält . . . . 21.
28—30. Aus den Projectionen einer Linie deren Durchschnitte mit den Projectionsebenen zu bestimmen und umgekehrt . . . . . 21.
31. Den Winkel zu bestimmen, den eine durch ihre Projectionen gegebene Linie mit den Projectionsebenen einschließt . . . . . 23.
32. 33. Die wahre Länge einer Linie aus ihren Projectionen zu bestimmen . . . . 24.
34. Uebungsaufgabe . . . . . 25.
35. Die Vertikalprojection einer die Basis schneidenden Linie aus ihrer Horizontalprojection und dem Winkel, den sie mit der Vertikalebene einschließt, zu finden . . . . . . 25.
36. Aus der Horizontaltrace einer Ebene und einem Punkte ihrer Vertikaltrace diese zu bestimmen . . 26.
37. Aus den Tracen einer Ebene den Flächenwinkel derselben mit einer der Projectionsebenen zu finden 26.
38. Aus der Horizontaltrace einer Ebene und ihrem Flächenwinkel mit der Horizontalebene die Vertikaltrace zu bestimmen . . . . 27.
39. Durch eine in der vertikalen Projectionsebene gegebene Gerade eine Ebene unter bekannter Neigung gegen die Horizontalebene zu legen . . 28.
40. 41. Die Tracen einer durch drei Punkte bestimmten Ebene anzugeben . . . . 28.
42. 43. Die wahre Größe und Gestalt eines durch drei ꝛc. Punkte im Raume bestimmten Dreiecks ꝛc. zu finden 30.
44. Eine Ebene dreht sich mit einer darin befindlichen Linie. Man soll die Projectionen der Linie nach der Drehung angeben . . . . . 31.
45. Desgleichen wenn die Linie mit der Ebene einen Winkel einschließt . . . . . . 32.

Dritter Abschnitt.

Betrachtung der Punkte, Linien und Ebenen in Beziehung auf ihre Durchschnitte und die verschiedenen Lagen, die sie gegen einander haben. Aufgaben.

Seite

§. 46. Die Projectionen zweier Parallellinien sind parallel . . . . 33.

46. Umgekehrt. Die Linien im Raume sind parallel, wenn es ihre Projectionen in beiden Projectionsebenen sind . . . . 33.

47. Durch einen Punkt eine Parallellinie mit einer Geraden zu ziehen . . . . . 34.

48. Aus den Projectionen zweier Linien zu sehen, ob sich die Linien im Raume schneiden, oder nicht . 34.

49. Den Winkel zu bestimmen, den zwei Gerade, welche sich schneiden, mit einander bilden . . 35.

50. Aus den Winkeln, welche zwei Gerade mit der horizontalen Projectionsebene einschließen, und den Winkel, den sie im Raume bilden, die Horizontalprojectionen der Linien, oder die Horizontalprojection des Winkels zu finden . . . . 35.

51. Durch einen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche unter gegebenen Winkeln gegen beide Projectionsebenen geneigt ist . . . . 36.

52. Durch einen Punkt nach einer Geraden eine Linie so zu ziehen, daß beide einen gegebenen Winkel einschließen . . . . . 38.

53. Aus der Horizontalprojection eines in einer bekannten Ebene liegenden Punktes, dessen Vertikalprojection zu finden . . . . . . 39.

54. Von den Projectionen eines in einer bekannten Ebene liegenden Punktes kann nur eine willkührlich angenommen werden . . . 40.

55. 56. Den Durchschnitt einer Linie mit einer Ebene zu finden . . . . . . 40.

57. 58. Durch einen Punkt einer Ebene in der Ebene eine Parallellinie mit einer Projectionsebene zu ziehen . . . . 41.

59. Durch einen Punkt eine, mit einer Ebene parallele, Horizontallinie zu ziehen . . . . 42.

60. Durch einen Punkt eine Ebene parallel mit einer Ebene zu legen . . . . . . 42.

61. Den Durchschnitt zweier Ebenen zu bestimmen . 43.

Seite

§. 62. Durch eine Linie eine Ebene so zu legen, daß sie die Horizontalebene unter einem gegebenen Winkel schneidet . . . . . . 45.
63. Wenn eine Linie auf einer Ebene senkrecht ist, so sind ihre Projectionen auf den Tracen dieser Ebene senkrecht . . . . . . 46.
63. Umgekehrt: Wenn die Projectionen einer Linie auf den Tracen einer Ebene senkrecht sind, so ist die Linie auf dieser Ebene senkrecht . . 46.
64. In einem Punkte einer Ebene eine Senkrechte auf diese Ebene zu errichten, oder von einem beliebigen Punkt ein Perpendikel auf diese Ebene zu fällen 47.
65. Aus den gewöhnlichen Projectionen eines Punktes, dessen Projectionen auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene zu bestimmen . . . 48.
66. Durch einen Punkt einer Linie oder durch einen beliebigen Punkt eine Ebene senkrecht auf die Linie zu führen . . . . . . 48.
67. Den Abstand eines Punktes von einer Geraden zu bestimmen . . . . . . 48.
68. Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene zu finden . . . . . . 49.
69. Den Winkel zu bestimmen, den zwei Ebenen einschließen . . . . . . 49.
70. Durch eine in einer Ebene gegebene Linie eine Ebene unter bekannter Neigung gegen jene Ebene zu legen . . . . . . 51.
71. Aus den Projectionen einer Linie und der Horizontalprojection einer andern, mit ihr auf einen gegebenen Abstand parallelen Linie, die Vertikalprojection der letzteren zu finden . . . . . 51.
72. Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche unter gegebenen Winkeln gegen beide Projectionsebenen geneigt ist . . . . . . 52.
73. Die Entfernung zweier Parallelebenen zu bestimmen, und mit einer Ebene auf einen gegebenen Abstand eine parallele Ebene zu legen . . . . 53.
74. Durch eine von zwei Linien, welche nicht parallel sind, und sich nicht schneiden, eine Ebene parallel mit der andern zu legen . . . . . . 53.
75. 76. Den Ort und die Größe des kürzesten Abstandes zweier Linien, die nicht in einer Ebene liegen, d. h. die Linie zu finden, welche auf beiden zugleich senkrecht ist . . . . . . 53.
77. Uebungsaufgaben . . . . . 55.

Vierter Abschnitt.

Darstellung begrenzter ebener Flächen und von Ebenen eingeschlossener Körper in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen. Durchschnitte dieser Körper mittelst Ebenen und Entwickelung der Oberflächen.

Seite

§. 78. Darstellung begrenzter Ebenen im Allgemeinen 56.

79. Die Projectionen einer ebenen, geradlinigen Figur zu bestimmen, nachdem sie sich um einen gegebenen Winkel gedreht hat . . . . . 57.

80. Desgl. einer ebenen krummlinigen Figur . 57.

81. Ueber die Projicirung eines Kreises . . 58.

82. Wie man verfährt, wenn sich mit der ebenen Figur eine gegen sie geneigte und fest mit ihr verbundene Linie bewegt . . . . . 59.

83. Projicirung der von Ebenen begrenzten Körper . 59.

84. Eine Pyramide zu projiciren . . . 59.

85. Projicirung körperlicher Ecken . . . 60.

86—91. Sechs Aufgaben über die Darstellung einer dreiseitigen körperlichen Ecke . . . 61.

92. Aus den Projectionen einer dreiseitigen körperlichen Ecke ihre drei Flächenwinkel zu bestimmen . 65.

93. Den Durchschnitt einer Pyramide mit einer auf der Vertikalebene senkrechten Ebene zu projiciren, nach seiner wahren Gestalt und Größe umzulegen und die Pyramidenfläche sammt dem Schnitt zu entwickeln 66.

94. Unter welchen Bedingungen die Projectionen einer abgekürzten Pyramide angenommen werden müssen 68.

95. Den Durchschnitt einer Pyramide mit einer beliebigen Ebene zu projiciren, umzulegen und zu entwickeln . . . . . . 68.

96. Ueber die Darstellung eckiger Körper in verschiedenen Lagen . . . . . . 69.

97. Einen Würfel in verschiedenen Lagen darzustellen 69.

98. Desgleichen eine Pyramide . . . 71.

99. Eine Pyramide in verschiedenen Lagen auf einer beliebigen Vertikalebene darzustellen . . . 71.

100. Aus der Grundfläche und zwei Seitenflächen einer abgekürzten Pyramide dieselbe zu zeichnen und ihr Netz zu construiren . . . . 72.

101. Uebungsaufgaben . . . . 72.

Fünfter Abschnitt.

Von den krummen Linien und den Tangenten.

Seite

§. 102. 103. Ueber die Curven und ihre Darstellung im Allgemeinen . . . . . . 74.

104. 105. Die Durchschnitte einer Curve mit den Projectionsebenen zu bestimmen . . . 75.

106. Aus der einen Projection einer in einer bekannten Ebene befindlichen Curve ihre andere Projection zu finden . . . . . . 76.

107. Den Durchschnitt einer Curve mit einer Ebene zu bestimmen . . . . . 77.

108. Aus den Projectionen eines Kreisbogens die Durchschnitte des ganzen Kreises mit einer Ebene zu bestimmen . . . . . 77.

109. Aus den Projectionen einer Curve zu untersuchen, ob die Curve einfach, oder doppelt gekrümmt ist 78.

110. Die wahre Gestalt einer ebenen Curve aus ihren Projectionen zu erkennen . . . 78.

111. Wie die Projectionen einer ebenen Curve anzunehmen sind . . . . . 78.

Von den Tangenten an krummen Linien.

112. Erklärung der Tangenten . . . 79.

113. Die Projectionen von Tangenten an Curven sind Tangenten an den Projectionen der Curven . 80.

114. Ueber die Bestimmung derLage der Tangenten und sich berührender Curven . . . 80.

115. Neigung der Curven gegen einander und gegen Ebenen . . . . . . 80.

116. Normalebene, Normallinie, Tangentialebene . 81.

117. Ueber die Bestimmung der Normallinie . 82.

118—122. Fälle, welche vorkommen, wenn eine Tangente an eine Curve gezogen werden soll. Geometrischer Ort . . . . . . 83.

123. An eine Curve durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt eine Tangente zu ziehen . 87.

124. An eine Curve eine Tangente parallel mit einer Linie zu ziehrn, deren Horizontalprojection gegeben ist . . . . . . 87.

Seite

§. 125. Durch einen im Raume gegebenen Punkt eine Normalebene auf eine Curve zu legen . . 88.

Von den bekanntesten krummen Linien.

126. Krumme Linien, welche näher betrachtet werden sollen . . . . . . 88.

Kegelschnitte.

A. Ellipse.

127. Erklärung . . . . . 89.
128. Construction derselben . . . 90.
129. Die Achsen einer Ellipse zu ziehen . . 90.
130. In einem Punkte eine Tangente an eine Ellipse zu ziehen . . . , . . 90.
131. Von einem außerhalb einer Ellipse liegenden Punkte und parallel mit einer Geraden eine Tangente an die Ellipse u ziehen . . . . 91.

B. Parabel.

133. Erklärung . . . . . 92.
134. Construction derselben . . . . 92.
135. In einem Punkte eine Tangente an eine Parabel zu ziehen . . . . . . 93.
136. Von einem außerhalb einer Parabel liegenden Punkte und parallel mit einer gegebenen Geraden eine Tangente an die Parabel zu ziehen. . . 93.

C. Hyperbel.

137. Erklärung . . . . . 93.
138. Construction derselben . . . 94.
139. In einem Punkte eine Tangente an eine Hyperbel zu ziehen . . . . . 94.
140. Von einem außerhalb einer Hyperbel liegenden Punkte und parallel mit einer gegebenen Geraden eine Tangente an eine Hyperbel zu ziehen . . 95.
141. Zu einem Punkte einer Ellipse, Parabel und Hyperbel, oder von einem außerhalb dieser Curven liegenden Punkte eine Normale zur Curve zu ziehen 95.

Evolvente.

142. Erklärung; Evolute . . . : 96.
143. Die Normalen der Evolvente sind Tangenten an der Evolute . . . . . . 96.
144. Krümmungskreis, Krümmungshalbmesser . 96.

Seite

§. 145. Construction der Evolvente . . . 97.
146. Eine Tangente an die Evolvente zu ziehen . 98.

Cykloiden.

148. Erklärung der Cykloide, Epicykloide und Hypocykloide . . . . . . 98.
149. Construction dieser Curven . . . 99.
150. Tangenten an denselben . . . 100.

Schraubenlinie.

152. 153. Erklärung der Schraubenlinie, Schraubengang, Höhe desselben . . . . . 101.
154. Construction der Schraubenlinie . . 102.
155. Tangente an derselben . . . . 103.

Sechster Abschnitt.

Darstellung der krummen Flächen.

156—160. Ueber die Darstellung der krummen Flächen im Allgemeinen; Erzeugungslinien, Directions- oder Leitlinien derselben . . . 104.

Cylindrische Flächen.

161. Erklärung . . . . . . 108.
162. Aus der Erzeugungs- und Directionslinie einer cylindrischen Fläche dieselbe zu zeichnen und ihre Tracen anzugeben . . . . . . 108.
163. Ueber die Ausführung der Zeichnung . . 110.
164. Aus der Horizontalprojection eines Punktes einer cylindrischen Fläche seine Vertikalprojection zu finden 111.

Konische Flächen.

165. Erklärung . . . . . . 112.
166. Aus der Directionslinie und der Spitze einer konischen Fläche dieselbe zu zeichnen und ihre Horizontaltrace anzugeben . . . . 112.
167. Aus der Horizontalprojection eines Punktes einer konischen Fläche seine Vertikalprojection zu finden 113.

Umhüllungsflächen.

168. Erklärung . . . . . . 113.
169. Darstellung dieser Flächen . . . 114.

Regelrechte Flächen (surfaces réglées).

170. Erklärung . . . . . . 114.
171. An zwei Geraden bewegt sich eine dritte Gerade so,

Seite

daß sie stets mit der Vertikalebene parallel bleibt. Man soll die Fläche darstellen, welche dadurch erzeugt wird . . . . . . 115.

§. 172. Es sind drei gerade Linien gegeben. Man soll die Fläche darstellen, welche von einer Geraden erzeugt wird, die sich so bewegt, daß sie jene drei Linien stets berührt . . . . . 116.

Entwickelbare Flächen (surfaces développables).

173. Erklärung . . . . . 116.

174. Darstellung dieser Flächen . . . 117.

Revolutions- oder Umdrehungsflächen.

175—177. Erklärung, Revolutionsachse, Meridian . 117.

178. 179. Die Achse und die Erzeugungslinie einer Revolutionsfläche sind gegeben. Man soll die Fläche darstellen . . . . 119.

180. Die Trace einer Umdrehungsfläche zu bestimmen 120.

181. Aus der Horizontalprojection eines Punktes einer Revolutionsfläche seine Vertikalprojection zu finden 121.

Siebenter Abschnitt.

Von den tangirenden Ebenen an krummen Flächen.

183. Erklärung . . . . . . 122.

184. Eine tangirende Ebene an einer krummen Fläche ist durch ihren Berührungspunkt bestimmt; Normallinie, Normalebene, Normalschnitt . . . 123.

185. Fälle, welche vorkommen können, wenn eine tangirende Ebene an eine krumme Fläche gelegt werden soll . . . . 123.

Erster Fall. Der Berührungspunkt ist gegeben.

186. Durch einen Punkt einer cylindrischen Fläche eine tangirende Ebene an diese Fläche zu legen . 124.

187. Desgleichen an eine konische Fläche . . 125.

188. Desgleichen an eine Revolutionsfläche . . 125.

189. Desgleichen auf eine andere Art an eine Revolutionsfläche . . . . 127.

Seite

Zweiter Fall. Die tangirende Ebene soll durch einen außerhalb der krummen Fläche liegenden Punkt geführt werden.

190. Durch einen außerhalb einer Cylinderfläche liegenden Punkt eine tangirende Ebene an diese Fläche zu führen . . . . . . 127.
191. Desgleichen an eine Kegelfläche . . 128.
192. Desgleichen an eine Revolutionsfläche . . 128.
193—195. Die Curve zu bestimmen, in welcher eine Revolutionsfläche von einer konischen Umhüllungsfläche, deren Spitze gegeben ist, berührt wird . 129.

Dritter Fall. Die tangirende Ebene soll mit einer gegebenen Geraden parallel gelegt werden.

196. An eine Cylinderfläche soll eine tangirende Ebene mit einer Geraden parallel gelegt werden . . 134.
197. Desgleichen an eine Kegelfläche . . 135.
198. Desgleichen an eine Revolutionsfläche . . 136.
199. Die Berührungscurve einer cylindrischen Fläche zu bestimmen, welche eine Revolutionsfläche umhüllt und berührt . . . . . 136.

Vierter Fall. Die tangirende Ebene soll durch eine gegebene Gerade gelegt werden.

200. Durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene an eine cylindrische oder konische Fläche zu legen 139.
201. 202. Desgleichen an eine Revolutionsfläche . 140.

Fünfter Fall. Die tangirende Ebene soll an mehrere krumme Flächen gelegt werden.

203. 204. An mehrere cylindrische oder konische Flächen eine tangirende Ebene zu legen . . 142.
205. Durch einen Punkt eine tangirende Ebene an zwei Kugelflächen zu legen . . . . 143.
206. An drei Kugelflächen eine tangirende Ebene zu legen . . . . . . 44 .
207. 208. Ergänzung des fünften Abschnitts in Bezug auf Tangenten an doppelt gekrümmten Curven 145

Achter Abschnitt.

Von den Durchschnitten krummer Flächen, den Tangenten an den Durchschnitten und der Entwickelung der Flächen.

Von den Durchschnitten krummer Flächen mit Ebenen.

		Seite
§. 209.	Ueber die Bestimmung dieser Durchschnitte überhaupt	147.
210.	Ein vertikaler Cylinder wird durch eine auf der vertikalen Projectionsebene senkrechte Ebene geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwickeln und eine Tangente daran ziehen . .	148.
211.	Desgleichen bei einer beliebigen cylindrischen Fläche und einer beliebigen schneidenden Ebene .	151.
212.	Wie man die Projection einer Curve auf einer ihrer Normalebenen erhält	154.
213.	Ein gerader Kegel wird durch eine auf der Vertikalebene senkrechte Ebene geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwickeln und eine Tangente daran ziehen	154.
214.	Desgleichen bei einer beliebigen Kegelfläche und einer beliebigen Ebene	157.
215.	Uebungsaufgaben	158.
216.	Eine Kugelfläche wird durch eine Ebene geschnitten, welche auf der Vertikalebene senkrecht ist. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen und eine Tangente daran ziehen	158.
217.	Desgleichen bei einer beliebigen Revolutionsfläche mit vertikaler Achse und einer beliebigen Ebene	159.
218.	Eine regelrechte Fläche wird durch eine Vertikalebene geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren und umlegen	161.
219.	Uebungsaufgaben	162.

Von den Durchschnitten krummer Flächen unter sich.

220.	Ueber die Bestimmung dieser Durchschnitte überhaupt	163.

Seite

§. 221. Den Durchschnitt zweier cylindrischen Flächen zu bestimmen . . . . . . 165.

222. Desgleichen in besonderen Fällen . . 168.

223. Den Durchschnitt eines Cylinders und eines Kegels zu construiren . . . . 169.

224. Desgleichen in besonderen Fällen . . 170.

225. 226. Den Durchschnitt zweier gerader Kegelflächen zu bestimmen, die Kegelflächen sammt demselben zu entwickeln und eine Tangente an den Durchschnitt zu ziehen . . . . . . 171.

227. Den Durchschnitt zweier beliebigen konischen Flächen zu projiciren . . . . . . 173.

228. Den Durchschnitt eines geraden Kegels und eines schiefen Cylinders unter gewissen Voraussetzungen zu construiren . . . . . . 173.

229. Den Durchschnitt zweier Revolutionsflächen zu projiciren, deren Achsen sich schneiden . . 176.

230. 231. Schluß des Abschnitts und Uebungs-Aufgaben . . . . . . 177.

Neunter Abschnitt.

Darstellung verschiedener, zum Theil von krummen Flächen begrenzter Körper.

232. Einen Cylinder in verschiedenen Lagen zu projiciren . . . . 179.

233. Desgleichen einen Kegel . . . . . 180.

234. 235. Einen abgestutzten Kegel und überhaupt jeden Gegenstand auf eine beliebige Vertikalebene zu projiciren oder den Aufriß von einer andern Seite zu zeichnen . . . . . . 181.

236. Eine Revolutionsfläche zu projiciren, deren Achse mit der Vertikalebene parallel und gegen die Horizontalebene geneigt ist . . . . . 182.

237. 238. Eine Schraube zu zeichnen . . 182.

239. Eine Schraubenlinie auf einen geraden Kegel zu zeichnen . . . . . 184.

Zehnter Abschnitt.

Anwendung der Constructionslehre auf die Auflösung einiger Aufgaben.

Seite

§. 241. Den Mittelpunkt einer Kugelfläche zu finden, welche durch vier gegebene Punkte geht, oder um eine dreiseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben . . . . . . 186.

242. Einen Punkt zu finden, der von vier Ebenen gleichen Abstand hat, oder eine Kugel in eine dreieckige Pyramide zu beschreiben . . . 187.

243. Einen Punkt aus seinen Entfernungen von drei andern Punkten zu bestimmen oder aus der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide und den Längen der drei Seiten die Pyramide zu zeichnen . 188

244. Man soll eine Kugel in derjenigen Lage projiciren, in welcher sie drei andere Kugeln berührt, vorausgesetzt, daß es möglich ist . . 190.

245. Aus der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide und den Winkeln, welche sie mit den Seitenflächen bildet, die Pyramide zu zeichnen . . 191.

246. Aus der Größe eines Winkels im Raume, seiner Horizontalprojection und der Neigung eines seiner Schenkel gegen die Horizontalebene die Neigung des andern Schenkels gegen diese Ebene zu finden 193.

247. Aus den Projectionen einer Geraden und der Horizontalprojection einer andern, mit ihr auf einen gegebenen Abstand parallelen Geraden, die Vertikalprojection dieser letzteren zu finden . . 193.

248. Eine Gerade zu bestimmen, die mit zwei andern parallelen Geraden parallel ist und von jeder einen gegebenen Abstand hat . . . 184.

249. Einen Punkt aus seinen Entfernungen von drei Geraden zu finden . . . . 195.

250. Eine Kugelfläche zu beschreiben, welche durch drei Punkte geht und zugleich eine gegebene Ebene berührt . . . . . . 195.

251. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Ku-

Seite

gelfläche anzugeben, welche zwei gegebene Ebenen berührt und zugleich durch einen bekannten Punkt geht . . . . . . 198.

§. 252. Desgleichen wenn die Kugelfläche durch zwei Punkte gehen und zugleich zwei Ebenen berühren soll . . . . . . 199.

253. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche anzugeben, welche eine andere Kugelfläche und eine Ebene berühren, und zugleich durch einen gegebenen Punkt gehen soll . . . 200.

254. Desgleichen wenn die Kugelfläche noch zugleich durch einen zweiten Punkt gehen soll . . . 201.

255. Durch einen außerhalb zweier Ebenen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche gegen jede dieser Ebenen unter einem gegebenen Winkel geneigt ist . . . . . 201.

256. Durch einen Punkt eine unter einem gegebenen Winkel gegen die horizontale Projectionsebene geneigte Gerade zu ziehen, welche zugleich mit einer beliebigen Ebene parallel ist . . . . 202.

257. Eine Wendeltreppe von gegebenen Dimensionen zu zeichnen . . . . . 202.

258. Den Wellbaum einer Stampfmühle zu zeichnen 203.

Elfter Abschnitt.

Anwendung der Constructionslehre auf die Bestimmung des Lichtes und des Schattens.

260. Direction des Lichtes . . . . 204.

261. Schatten eines Punktes . . . 205.

262—264. Schatten einer Linie . . . 206.

265—267. Schatten eines Körpers . . . 207.

268—273. Beleuchtung der Körper . . . 209.

274. Den Schatten einer Linie zu bestimmen . 212.

275—277. Den Schatten eines Prisma's oder eines Cylinders und einer darauf liegenden prismatischen oder cylindrischen Platte zu construiren . . 213.

278. Den Schatten zu construiren, welchen ein Balken in einen hohlen Halbcylinder wirft . . 215.

279. Den Schatten einer Nische zu construiren . 215.

Seite

§. 280. Den Schatten einer auf der Horizontalebene liegenden Kugel zu construiren . . . 216.

281. Den Schatten im Innern einer hohlen Halbkugel und den Schlagschatten derselben zu bestimmen 247.

282. Den Schlagschatten zu construiren, welchen irgend eine Vertikalebene auf einen horizontalen prismatischen Körper wirft . . . . 218.

283. Die Grenzen des eignen Schattens eines auf der Horizontalebene liegenden Rings zu bestimmen 219.

284. Verfahren bei der Construction des Schattens, wenn die Lichtstrahlen nicht parallel sind . . 220.

Zwölfter Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Constructionslehre auf die Perspective, oder kurze Anleitung zur Perspective.

285. 286. Erklärung und Erläuterung der Perspective 220.

287. Ueber die Größe und Bestimmung der perspectivischen Bilder im Allgemeinen . . . 222.

288. Erklärungen . . . . . 223.

289. 290. Ueber die Stellung des Auges und über die Lage der perspectivischen Bilder . . 224.

291. 292. Die Perspective eines in der Grundebene hinter der Tafel liegenden Punktes zu bestimmen 225.

293. 294. Das perspectivische Bild irgend eines im Raume befindlichen Punktes zu bestimmen . . 226.

295—300. Sätze über die Lage der perspectivischen Bilder gewisser, im Raume befindlicher Linie . 228.

301. Eine in der Grundebene liegende Linie oder ebene Figur in Perspective zu bringen . . 232.

302. Eine im Raume gegebene Linie oder ebene Figur in Perspective zu bringen . . . 233.

303. Irgend einen Körper, z. B. einen auf der Grundebene stehenden Würfel, in Perspective zu bringen . . . . . . 234.

304. Ein Zimmer in Perspective zu bringen . 235.

Seite

§. 305. Die Perspective eines Gegenstandes ist zur Bestimmung der wahren Lage, Größe und Gestalt des Gegenstandes allein nicht hinreichend . . 236.

306. 307. Aus dem perspectivischen Bilde eines Punktes, einer Linie oder eines Körpers und einer Projection dieses Gegenstandes die andere Projection und mithin auch den Gegenstand im Raume selbst zu bestimmen, vorausgesetzt, daß Distanz- und Augenpunkt bekannt sind . . . . . 236.

308. Schluß . . . . 238.

Einleitung.

§. 1.

Geometrische Größen, welche nicht mehr als zwei Dimensionen haben, kann man nach ihrer wahren Form und Größe unmittelbar auf einer Ebene darstellen, weil diese selbst zwei Dimensionen hat, und also das Auftragen eben so vieler gestattet. Anders verhält es sich aber, wenn geometrische Größen, deren Theile nicht in einer und derselben Ebene liegen, oder welche mehr als zwei Dimensionen haben, d. i. Körper auf einer Ebene dargestellt werden sollen. Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die geometrische Constructionslehre oder darstellende Geometrie (Géometrie descriptive). Sie lehrt nämlich: im Raume befindliche Gegenstände auf einer Ebene darstellen, und zeigt überdieß, wie man aus einer genauen Beschreibung dieser Gegenstände, mittelst ihrer Darstellung, ihre wahre Gestalt und Größe erkennen, und daraus alles ableiten kann, was aus denselben und den verschiedenen Lagen der Gegenstände im Raume hervorgeht.

§. 2.

Aus diesem doppelten Gesichtspunkte betrachtet, ist die geometrische Constructionslehre gleich wichtig und interessant. Insoferne sie körperliche Gegenstände auf einer Ebene darstellen lehrt, ist sie Zeichenkunst; indes-

sen wesentlich von der gewöhnlichen Zeichenkunst verschieden, deren Bestreben darauf gerichtet ist, die täuschendste Aehnlichkeit des Gegenstandes in der Lage zu geben, wie er dem Auge des Beobachters von einem gewissen Standpunkte aus erscheint. Aus diesen Darstellungen läßt sich nun weder die wahre Größe und gegenseitige Lage der Gegenstände und aller ihrer Theile, noch alles dasjenige, was daraus hervorgeht, so einfach und so bestimmt ableiten, als es zum klaren Auffassen des dargestellten Gegenstandes, und insbesondere zur Ausführung desselben nach der Zeichnung erforderlich ist.

Dagegen lassen sich aus den Darstellungen der geometrischen Constructionslehre die richtigen Dimensionen und genauen Verhältnisse der Gegenstände, so wie ihre wahre Gestalt und Lage entweder unmittelbar genau erkennen, oder auf eine einfache und leichte Weise bestimmt entnehmen. Sie setzt daher Mechaniker, Baumeister und Künstler in den Stand, ihre Ideen und Entwürfe Andern und sich selbst durch Zeichnung zur strengen Prüfung vorzulegen, und sie mit Genauigkeit auszuführen; sie ist das Mittel zur allgemeinen Verbreitung nützlicher Erfindungen im Fache des Maschinenwesens, der Baukunst und anderer Künste, weil sie diese Erfindungen Andern auf eine vollkommnere Art mittheilen lehrt, als es selbst durch die umständlichste Beschreibung geschehen kann.

In der andern Hinsicht, nämlich insoferne die darstellende Geometrie aus der Beschreibung geometrischer Gegenstände durch die Darstellung derselben, und aus diesen Darstellungen alles ableiten lehrt, was aus der Größe, Form und Lage der Gegenstände hervorgeht, ist sie dem ausübenden Künstler und dem denkenden Handwerker unentbehrlich, weil er nur durch sie in den

Stand gesetzt werden kann, richtige Zeichnungen zu entwerfen, zu verstehen, und sie richtig in Natur auszuführen. Ihre Kenntniß ist vorzüglich denjenigen nothwendig, welche technische Gegenstände angeben und ausführen lassen müssen.

Nicht minder wichtig, ja fast unentbehrlich, ist die geometrische Constructionslehre zur Entwerfung perspectivischer Zeichnungen, und zur Bestimmung des Lichtes und des Schattens in Grund- und Aufrissen. Diese beiden Zweige der Zeichenkunst können nur durch sie allein mit Gründlichkeit behandelt werden.

Um die Wichtigkeit der darstellenden Geometrie für den Militär, und insbesondere für den Ingenieur und Artilleristen zu bezeichnen, darf man nur sagen, daß er ohne sie weder im Stande ist, richtige Zeichnungen von Gegenständen der Fortifikation und der Artillerie zu entwerfen und auszuführen, noch zu verstehen und zu beurtheilen. Man fühlt diese Wichtigkeit der geometrischen Constructionslehre für den gebildeten Militär noch mehr, wenn man erwägt, daß so viele militärische Werke mit Kupfern erscheinen.

Endlich erleichtert die geometrische Constructionslehre das Studium der analytischen Geometrie, übt und schärft, als vortreffliches Mittel, den Verstand und die Einbildungskraft außerordentlich, und ist zugleich sehr geeignet, dem, der sich damit befaßt, eine nicht minder anziehende als geistreiche Beschäftigung zu gewähren.

§. 3.

Weil nun die darzustellenden Körper durch Flächen, diese durch Linien begrenzt, Linien aber durch Punkte bestimmt werden, so kommt es zunächst darauf an, die Lage eines im Raume gegebenen Punktes zu bestimmen.

Die Lage eines im Raume gegebenen Punktes läßt sich nur mit Hülfe anderer, der Lage nach bekannter Gegenstände bestimmen. Damit aber diese Gegenstände einen häufigen Gebrauch zulassen und selbst leicht angegeben werden können, ist es wichtig, daß sie möglichst einfach sind. Sie können nun in nichts anderem als in Punkten, oder Linien, oder Flächen bestehen, auf die man dann die Lage des zu bestimmenden Punktes bezieht. Mit Hülfe der Projectionsmethode, die wir im folgenden Abschnitte näher kennen lernen, reichen zu diesem Zwecke zwei Ebenen hin.

Erster Abschnitt.

Erklärungen. Bestimmung der Lage eines Punktes, einer Linie, einer Fläche und eines Körpers im Allgemeinen, mit Hülfe der Projectionen.

§. 4.

Projection eines Punktes auf einer Ebene nennt man den Punkt, in welchem das, von jenem Punkte auf die Ebene gefällte Perpendikel, diese trifft.

§. 5.

Es folgt hieraus, daß diese Projection auch zugleich die Projection aller Punkte dieses Perpendikels ist, und daß durch die Projection eines Punktes auf einer Ebene, dasjenige Perpendikel auf derselben bestimmt wird, in welchem der projicirte Punkt liegt. Hat man nun noch die Projection desselben Punktes auf einer zweiten Ebene, die nicht mit jener parallel ist, so liegt der Punkt auch in demjenigen Perpendikel, welches in dieser zweiten Projection auf dieser Ebene errichtet werden kann, mithin in dem Durchschnitte beider Perpendikel. Ein Punkt ist demnach durch seine Projectionen auf zwei nicht parallelen Ebenen völlig bestimmt.

Die Ebenen, auf denen man die Projectionen darstellt, heissen **Projectionsebenen**.

6.

Läßt man von allen Punkten a, b, ... m (Fig. 1.) einer im Raume befindlichen Linie am Perpendikel a', b', ... mm' auf eine Ebene AB fallen, so sind die Punkte a', b', ... m', in denen diese Perpendikel die Ebene AB treffen, die Projectionen jener Punkte, und die in der Ebene AB durch sie bestimmte Linie a'm' ist die **Projection** der Linie am im Raume auf dieser Ebene. Die Projection einer Linie auf einer Ebene ist also diejenige Linie in dieser Ebene, in welcher die Fußpunkte aller Perpendikel liegen, welche von der Linie im Raume auf die Ebene gefällt werden können.

§. 7.

Denkt man sich durch alle diese Perpendikel aa', bb', ... mm' eine Fläche am' gelegt, so ist sie auf AB senkrecht, und die Linie a'm' ist offenbar die Projection aller Linien in dieser Fläche. Wenn man also durch die Projection einer Linie auf einer Ebene, eine Fläche senkrecht auf diese Ebene legt, so liegt die Linie in dieser Fläche. Hat man nun noch die Projection derselben Linie auf einer zweiten Ebene, die nicht mit jener parallel ist, so liegt die Linie auch in derjenigen Fläche, welche durch diese zweite Projection senkrecht auf die Ebene gelegt werden kann, mithin liegt sie in dem Durchschnitte dieser beiden Flächen. **Eine Linie im Raume ist demnach durch ihre Projectionen auf zwei nicht parallelen Ebenen völlig bestimmt.** Dieß läßt sich auch so einsehen: Eine Linie ist bestimmt, wenn alle ihre Punkte bestimmt sind; nun sind aber alle Punkte einer Linie im Raume durch ihre Projectionen bestimmt (§. 5.), folglich ist es auch die Linie selbst.

§. 8.

Da die Fläche, welche durch die Perpendikel aa', bb', ... mm' (Fig. 1.) gelegt wird, senkrecht auf der

Ebene AB und die Projection a'm' der Durchschnitt beider ist; so kann man auch sagen: die Projection einer Linie auf einer Ebene sei der Durchschnitt dieser Ebene mit einer durch die Linie senkrecht auf sie gelegten Fläche. Eine solche Fläche heißt **projicirende Fläche** der Linie, welche durch sie projicirt wird.

§. 9.

Ist die Linie am (Fig. 2.) im Raume gerad, so liegen die von allen ihren Punkten a, b, . . . m auf die Ebene AB herabgelassenen Perpendikel aa', bb' . . . mm' in einer und derselben Ebene, deren Durchschnitt mit AB daher eine gerade Linie a'm' ist und die Projectionen aller Punkte der Linie enthält. **Die Projectionen einer Geraden sind daher gerad und werden folglich durch die Projectionen zweier Punkte der Geraden bestimmt. Die Verlängerungen der Projectionen einer Geraden sind mithin auch die Projectionen der Verlängerung der Geraden. Bei der geraden Linie ist die projicirende Fläche eine Ebene.**

§. 10.

Da eine Ebene durch drei Punkte bestimmt wird, welche nicht in einer Geraden liegen, oder durch zwei gerade Parallellinien, oder durch zwei gerade Linien, die sich schneiden, so wird auch eine Ebene im Raume durch die Projectionen der nämlichen Stücke bestimmt, weil diese Stücke durch ihre Projectionen bestimmt werden (§. 5. 7.). Weil aber die erste dieser Bedingungen mit der dritten einerlei und es ferner gleichgültig ist, wo die zwei Parallellinien, oder die sich schneidenden Linien in der durch sie bestimmten Ebene liegen; so nimmt man sie am bequemsten in derjenigen Lage an, in welcher sie, in Beziehung auf die beiden Pro-

jectionsebenen, am leichtesten construirt werden können. Dieses sind nun offenbar die Durchschnitte der Ebene mit den Projectionsebenen. Eine Ebene wird daher dadurch gegeben, oder als bestimmt betrachtet, wenn ihre Durchschnitte mit den Projectionsebenen gegeben, oder bestimmt worden sind.

Da diese Durchschnitte sehr häufig vorkommen, so sollen sie der Kürze wegen Tracen genannt werden.

§. 11.

Auch die krummen Flächen stellt man blos durch Linien, und zwar gewöhnlich durch zwei Linien dar, von denen die eine die krumme Fläche erzeugt, wenn sie sich unter gewissen bekannten Bedingungen an der andern fortbewegt, so daß man also im Stande ist, leicht jede Lage derselben und mithin auch durch eine solche Lage jeden Punkt der krummen Fläche anzugeben. Im sechsten Abschnitte werden die krummen Flächen näher betrachtet.

§. 12.

Es ist leicht einzusehen, daß die Darstellung der Körper mit keinen Schwierigkeiten mehr verknüpft sein kann, sobald man ihre Kanten, oder die Flächen, durch welche sie begrenzt werden, darzustellen weiß.

§. 13.

Nach diesen allgemeinen Betrachtungen über die Darstellung geometrischer Größen mittelst der Projectionsmethode, gehen wir zu einer näheren Untersuchung der Projectionsebenen selbst über.

Es ist bereits erwähnt worden (§. 5. 7.), daß die beiden Projectionsebenen nicht mit einander parallel sind. Obgleich es nun gleichgültig ist, welchen Winkel sie mit einander einschließen, und in welcher Lage sie

sich im Raume befinden, so werden sie doch, der Einfachheit und Klarheit wegen, immer senkrecht auf einander, und die eine horizontal, folglich die andere vertikal, angenommen. Jene heißt daher die horizontale, diese die vertikale Projectionsebene. Eben so heißen die in ihnen liegenden Projectionen und Tracen, Horizontal- und Vertikalprojectionen und Horizontal- und Vertikaltracen. Beide Projectionsebenen denkt man sich übrigens unbegrenzt.

§. 14.

Da alle Projectionen auf einer und derselben Ebene, nämlich auf der Zeichnungsfläche, dargestellt werden müssen, so denkt man sich, Behufs der Construction, die vertikale Projectionsebene beständig um ihren Durchschnitt mit der horizontalen Projectionsebene so weit umgedreht, bis sie mit dieser nur eine einzige Ebene, nämlich die Zeichnungsfläche, ausmacht, und construirt nun in dieser Lage, was zu construiren ist. Hat man also den Durchschnitt beider Ebenen quer vor sich, so denkt man sich den oberen Theil der vertikalen Projectionsebene so weit zurück gedreht, bis er mit dem hinteren Theile der horizontalen Projectionsebene zusammenfällt. Mit dem vorderen Theile dieser Ebene fällt dann auch zugleich der untere Theil der vertikalen Projectionsebene zusammen.

Man stellt also auf der Zeichnungsfläche oberhalb der Linie, welche den Durchschnitt beider Projectionsebenen bezeichnet, alle Projectionen dar, die sich auf dem oberen Theile der vertikalen und dem hinteren Theile der horizontalen Projectionsebene befinden. Ebenso werden auf der Zeichnungsfläche unterhalb jenes Durchschnittes beider Projectionsebenen alle Projectionen angegeben, die in dem vorderen Theile der horizontalen und dem

unteren Theile der vertikalen Projectionsebene liegen. Gewöhnlich reichen indessen der obere Theil der vertikalen und der vordere Theil der horizontalen Projectionsebene zu allen Darstellungen hin, d. h. die darzustellenden Gegenstände befinden sich gewöhnlich ganz in dem oberen vorderen der vier Räume, welche durch die beiden Projectionsebenen entstehen.

§. 15.

Will man sich nun die Lage des projicirten Gegenstandes und alles, was damit vorgenommen wird, im Raume versinnlichen, so denkt man sich die vertikale Projectionsebene, d. i. den oberen Theil der Zeichnungsfläche, wieder senkrecht auf die horizontale Projectionsebene, d. i. den untern Theil der Zeichnungsfläche, um den gemeinschaftlichen Durchschnitt beider aufgerichtet.

Dieser Durchschnitt wird deßwegen auf jeder Zeichnung angegeben und durch eine starke Linie bezeichnet, welche der Kürze wegen Basis heißen soll.

§. 16.

In der Baukunst wird die Zeichnung, welche man erhält, indem man eine Seite eines Gebäudes mit allen bemerkenswerthen Punkten und Linien auf eine Vertikalebene projicirt, Aufriß des Gebäudes von der projicirten Seite genannt. Denkt man sich ein Gebäude durch eine Vertikalebene geschnitten und die so entstandene Fläche auf einen mit der schneidenden Ebene parallelen Plan projicirt, so heißt eine solche Zeichnung Durchschnitt oder Profil. Wird der Fuß eines Gebäudes, oder einer Etage auf eine horizontale Ebene projicirt, so erhält man den Grundriß. Manchmal wird auch überhaupt die Horizontalprojection eines Gegenstandes sein Grundriß und

die Vertikalprojection sein Aufriß genannt. Es stellt demnach im Allgemeinen die Horizontalprojection die Ansicht des Gegenstandes von oben, die Vertikalprojection aber die Ansicht von vornen dar.

§. 17.

Da man sich in der darstellenden Geometrie häufig mit Punkten und Linien beschäftigt, die in verschiedenen Ebenen liegen und oft nicht durch sie selbst, sondern durch ihre Projectionen näher angegeben werden, so bezeichnet man sie, zur Vermeidung von Irrthümern und leichterer Verständlichkeit wegen, auf verschiedene Art. Der Verfasser hat folgende Bezeichnungsart gewählt. Mit Buchstaben ohne Beistriche sind im Raume befindliche Punkte und Linien bezeichnet; die zugehörigen Projectionen sind mit denselben Buchstaben ausgedrückt, dabei aber die Buchstaben der Horizontalprojectionen mit einem Beistrich, die der Vertikalprojectionen dagegen mit zwei Beistrichen versehen. So bezeichnet z. B. der Punkt a den Punkt a im Raume selbst, a′ aber seine Horizontal- und a″ seine Vertikalprojection. Zuweilen ist jedoch auch der Punkt im Raume mit a′, a″ bezeichnet. Punktirte Linien entsprechen Linien, die man nicht sieht, gestrichelte dagegen sind Hülfslinien. In eine Ebene umgelegte Linien sind abwechselnd punktirt und gestrichelt.

Zweiter Abschnitt.

Betrachtung eines Punktes, einer geraden Linie, und einer Ebene, in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen. Aufgaben.

§. 18.

Der obere Theil AC (Fig. 3.) der vertikalen Projectionsebene kommt durch die in §. 14. beschriebene Umlegung in die Lage AC′. Wenn nun a ein Punkt im Raume ist und a′, a″ seine Projectionen sind, so ist aa′ senkrecht auf AB und aa″ senkrecht auf AC (§. 4.), folglich die durch diese Perpendikel bestimmte Ebene am senkrecht auf beiden Projectionsebenen, mithin auch auf der Basis. Diese ist daher auch senkrecht auf den Durchschnitten a′m, a″m der Ebene am mit den Projectionsebenen. Da sich nun die Lage der in AC liegenden Linie a″m während der Drehung gegen die Basis nicht ändert, so ist a″m auch nach dieser Drehung, in der Lage a‴m, noch im Punkt m auf der Basis senkrecht. Die Linien a′m, a‴m liegen nun mit der Basis in einer und derselben Ebene und sind zugleich in einem Punkte m auf der Basis senkrecht, folglich fallen sie in eine gerade Linie. Die beiden Projectionen eines Punktes liegen also in einer geraden, auf der Basis senkrechten Linie.

Diese Bemerkung ist wichtig und wird sehr häufig angewendet.

§. 19.

Aus der im vorigen §. gemachten Bemerkung, daß die Projectionen eines Punktes in einer geraden, auf

der Basis senkrechten Linie liegen, ergeben sich, in Verbindung mit den unten noch weiter angeführten §§. folgende Sätze in Bezug auf die Lage eines Punktes gegen die Projectionsebenen.

1) Die eine Projection eines Punktes liegt stets in der Senkrechten, die von der andern auf die Basis gezogen werden kann (§. 18.).

Da die Winkel aa′m, a′ma″, aa″m (Fig. 3.) rechte Winkel sind (§. 4. 13.), so ist die Ebene am ein Rechteck, also a″m = aa′ und a′m = aa″; daher ist

2) das Perpendikel von der Projection in der einen Projectionsebene auf die Basis, stets die Entfernung des projicirten Punktes von der andern Projectionsebene. Liegt daher

3) die eine Projection in der Basis, so ist der Abstand des projicirten Punktes von der andern Projectionsebene Null, d. h. der Punkt fällt mit seiner Projection in dieser Ebene zusammen.

4) Wenn beide Projectionen eines Punktes in die Basis fallen, so sind sie mit dem projicirten Punkte einerlei.

§. 20.

Aus der im §. 8. gegebenen Erklärung der Projectionen einer Linie, leitet man leicht folgende Sätze rücksichtlich der Lage einer geraden Linie gegen die Projectionsebenen ab.

1) Ist die Linie im Raume auf der einen Projectionsebene senkrecht, z. B. auf der Horizontalen, so ist ihre Projection auf dieser ein Punkt und ihre andere Projection senkrecht auf der Basis.

Jenes folgt aus §. 6. Von diesem überzeugt man sich auf folgende Art. Da die Linie auf der horizontalen Projectionsebene senkrecht ist, so ist es auch die Ebene, welche durch sie auf die vertikale Projectionsebene senkrecht gelegt wird; der Durchschnitt dieser beiden, auf der Horizontalebene senkrechten Ebenen, d. i. die Vertikalprojection der Linie (§. 8.), ist daher auch senkrecht auf der Horizontalebene, mithin auf allen Linien darin, welche durch ihren Durchschnitt mit dieser Ebene gezogen sind, also auch auf der Basis.

2) Ist die Linie im Raume mit der einen Projectionsebene parallel, z. B. mit der vertikalen, so ist ihre Projection auf der andern parallel mit der Basis, wenn sie kein Punkt ist (Nro. 1.).

Eine durch die Linie mit der vertikalen Projectionsebene parallel gelegte Ebene schneidet nämlich die horizontale Projectionsebene senkrecht. Da nun durch die auf dieser Ebene nicht senkrecht vorausgesetzten Linie nur eine senkrechte Ebene darauf gelegt werden kann, so ist jene Parallelebene die projicirende Ebene (§. 8. 9.), und ihr Durchschnitt mit der Horizontalebene, d. i. die Horizontalprojection der Linie, ist mit der Basis parallel, weil beide Linien die Durchschnitte zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene sind.

3) Ist die Linie mit beiden Projectionsebenen parallel, so sind auch ihre beiden Projectionen mit der Basis parallel (Nro. 2.).

4) Liegt die Linie in der einen Projectionsebene, so ist sie selbst ihre Projection in dieser und ihre andere Projection liegt in der Basis (§. 8. 13.)

5) Liegt die Linie in der Basis, so fallen beide Projectionen mit ihr zusammen (Nro. 4.).

Diese Sätze sind auch, wie sich ziemlich leicht einsehen läßt, umgekehrt wahr. Sie heißen dann:

6) Wenn die eine Projection einer Linie ein Punkt und die andere senkrecht auf der Basis ist, so ist die Linie selbst senkrecht auf derjenigen Projectionsebene, worauf die Projection ein Punkt ist. Genügt vielleicht schon eine dieser Bedingungen? Welche?

7) Ist die Projection einer Linie in der einen Projectionsebene parallel mit der Basis, so ist die Linie selbst parallel mit der andern Projectionsebene.

8) Sind beide Projectionen einer Linie parallel mit der Basis, so ist die Linie mit beiden Projectionsebenen und mit der Basis parallel.

9) Wenn die eine Projection einer Linie in der Basis liegt, so fällt die Linie mit ihrer andern Projection zusammen.

10) Liegen beide Projectionen einer Linie in der Basis, so ist die Linie selbst einerlei mit ihnen.

Mit Hülfe dieser Sätze läßt sich also aus der Beschaffenheit und Lage der Projectionen einer Linie die Lage der Linie im Raume in Bezug auf die Projectionsebenen erkennen. Können wohl beide Projectionen einer Geraden zugleich Punkte, oder beide zu gleicher Zeit auf der Basis senkrecht sein?

Anmerkung. Es ist sehr nützlich, wenn der Schüler Projectionen von allerlei Lagen gegen die Basis annimmt und sich dann Rechenschaft über die Lage der entsprechenden Linien im Raume zu geben sucht.

§. 21.

Was die Lage betrifft, welche eine Ebene gegen die Projectionsebenen haben kann, so wird man leicht auf folgende Sätze geführt.

1) Ist die Ebene auf einer Projectionsebene senkrecht, z. B. auf der vertikalen, so ist ihre Trace in der andern Projectionsebene senkrecht auf der Basis; denn diese Trace ist der Durchschnitt zweier Ebenen, die zugleich auf einer dritten Ebene, nämlich bei der gemachten Voraussetzung auf der vertikalen Projectionsebene, senkrecht sind; die Trace ist also senkrecht auf dieser Projectionsebene, mithin auch auf jeder Linie darin, die durch den Durchschnitt der Trace mit der Ebene geht; eine solche Linie ist aber die Basis. Umgekehrt: Wenn 2c.

2) Ist die Ebene auf beiden Projectionsebenen zugleich senkrecht, so sind ihre beiden Tracen auf der Basis senkrecht (Nro. 1.). Umgekehrt: Sind beide Tracen 2c.

3) Ist die Ebene parallel mit einer Projectionsebene, so gibt es nur auf der andern eine Trace, und diese ist parallel mit der Basis; denn sie und die Basis sind die Durchschnitte zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene. Umgekehrt: Hat eine Ebene nur eine Trace 2c.

4) Ist aber eine Ebene mit keiner Projectionsebene parallel und nicht selbst durch die Basis gelegt, so schneiden ihre Tracen bei gehöriger Verlängerung die Basis entweder in einem und demselben Punkte, oder sind zugleich mit ihr parallel.

Da nämlich die Ebene mit keiner Projectionsebene parallel und nicht durch die Basis gelegt ist, so hat sie zwei Tracen und schneidet entweder die Basis oder

nicht. Ist nun jenes der Fall, so kann es nur in einem Punkte geschehen, weil eine Ebene von einer geraden Linie nur einmal geschnitten werden kann. Da nun dieser Durchschnittspunkt zugleich jeder Projectionsebene und der fraglichen Ebene angehört, so liegt er in den Durchschnitten dieser Ebene mit jenen Ebenen, d. h. in den Tracen. Beide Tracen schneiden also die Basis zugleich in einem und demselben Punkte. Wird aber die Basis nicht von der Ebene geschnitten, so kann dieses auch nicht von ihren Tracen geschehen, weil es sonst mit der Ebene selbst der Fall wäre. Beide Tracen sind also in diesem Falle mit der Basis parallel.

Aus Nro. 4. folgt also:

5) Entweder sind beide Tracen einer Ebene mit der Basis zugleich parallel, oder sie schneiden sich, gehörig verlängert, in einem Punkte derselben. Umgekehrt: Schneiden beide Tracen 2c.

6) Wenn eine Ebene senkrecht auf einer Projectionsebene ist, und zugleich eine darin liegende Linie senkrecht schneidet, so sind die in der genannten Projectionsebene liegenden Projectionen aller Linien in jener Ebene, auf dieser Linie senkrecht; denn der Durchschnitt der Ebene mit der Projectionsebene ist die Projection jeder Linie in der Ebene (§. 8.).

Welche Lage hat eine Ebene gegen die Projectionsebenen, wenn ihre beiden Tracen zugleich senkrecht auf der Basis sind?

Der Anfänger nehme Tracen in allen möglichen Lagen gegen die Basis an und suche sich dann eine klare Vorstellung von der Lage der entsprechenden Ebenen im Raume zu machen.

§. 22.

Wenn ein Punkt einer geraden Linie irgend einen aliquoten Theil derselben abschneidet, so schneiden die Projectionen dieses Punktes dieselben aliquoten Theile von den Projectionen der Linie ab.

Zwischen Parallellinien liegende Linien werden durch andere Linien, die mit jenen parallel sind, in proportionale Theile geschnitten. Es liegt aber die Linie im Raume und jede ihrer Projectionen zwischen solchen Parallellinien, nämlich zwischen den Perpendikeln von den Endpunkten der Linie auf die Projectionsebenen, und ein Punkt der Linie ist mit seinen Projectionen durch Linien verbunden, die mit jenen Perpendikeln parallel sind.

Wenn man daher die Projectionen des nten Theils einer Linie aus den Projectionen der ganzen bestimmten Linie haben will, so darf man von diesen Projectionen nur den nten Theil auf der entsprechenden Seite abschneiden.

§. 23.

Wenn man von irgend einem Punkte a einer Ebene **A** ein Perpendikel auf eine darin liegende Gerade **b** fallen läßt, und die Ebene um diese Linie als feste Achse dreht, so beschreibt jener Punkt einen Kreis, dessen Halbmesser dieses Perpendikel ist, und dessen Centrum in der Achse b liegt. Da dieser Halbmesser während der Drehung seine senkrechte Lage gegen die Achse nicht ändert, so ist die durch ihn erzeugte Kreisebene auf dieser Achse und auf allen Ebenen senkrecht, welche durch die Achse gelegt werden.

Ist daher eine der Projectionsebenen eine solche Ebene, so ist ihr Durchschnitt mit jener Kreisebene die Projection aller Linien, welche in dieser Ebene liegen

(§. 7.), mithin auch des Halbmessers in allen seinen Lagen, und daher auf der Achse b senkrecht (§. 21. Nro. 6.). Dreht sich nun die Ebene A um diese Achse bis sie mit der Projectionsebene zusammenfällt, so bewegt sich der Halbmesser in der Kreisebene und fällt in seine Projection, welche, wie so eben gesagt wurde, senkrecht auf der Achse ist und offenbar durch die Projection des Punktes a geht, weil dieser Punkt ein Punkt des Halbmessers und also auch seine Projection ein Punkt der Projection desselben ist.

§. 24.

Wenn sich also eine Ebene um ihren Durchschnitt mit einer andern Ebene so weit dreht, bis sie mit dieser zusammen fällt, so fällt ein gewisser Punkt a derselben in die Senkrechte, welche von seiner Projection in der zweiten Ebene auf die Achse gezogen werden kann, und seine Entfernung von dieser Achse ist nichts anders, als der Halbmesser des von ihm bei der Drehung beschriebenen Bogens. Dieser Halbmesser ist nun offenbar die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wovon die eine Cathete die Entfernung des Punktes a von der einen Projectionsebene d. i. der Abstand seiner Projection auf der andern von der Basis (§. 19. Nro. 2.), und die andere Cathete seine Projection auf ersterer, d. i. die Senkrechte ist, welche von der Projection des Punktes in dieser Ebene auf die Drehungsachse gefällt werden kann. Da diese Catheten durch die Projectionen des Punktes und die Tracen der Ebene, in der er sich befindet, gegeben sind, so kann man die Hypotenuse leicht construiren und den Punkt in die eine Projectionsebene umlegen.

§. 25.

Auf gleiche Weise verhält es sich mit allen Punkten der sich drehenden Ebene, und man ist daher in den Stand gesetzt, in einer solchen Ebene verzeichnete Linien und Figuren, die durch ihre Projectionen gegeben sind, auf eine der beiden Projectionsebenen nach ihrer wahren Größe und Gestalt umzulegen oder zu übertragen.

In der Folge wird hiervon häufig Gebrauch gemacht werden, und es soll vorläufig folgendes Beispiel eine nähere Erläuterung des Gesagten seyn.

§. 26. Aufgabe.

Es seien a′b′, a″b″ (Fig. 4.) die Projectionen einer Linie ab im Raume, welche in der Ebene hlm liegt, d. h. deren Tracen hl, lm sind. Diese Linie soll in die horizontale Projectionsebene umgelegt werden.

Man mache a′i senkrecht auf lh, eg = a″c, so ist a′g die Größe der Hypotenuse des auf der horizontalen Projectionsebene stehenden rechtwinkeligen Dreiecks aa′e, welches entsteht, wenn man sich a″c in a′ senkrecht auf die Horizontalebene aufgerichtet und von seinem Ende a, als dem Punkte im Raume, nach e eine Gerade, die Hypotenuse, gezogen denkt. Dreht man jetzt die Ebene um hl rückwärts, so legt sich diese Hypotenuse = a′g, von e aus auf das Perpendikel a′i und gibt den Punkt i als den im Raume gegebenen und in die horizontale Projectionsebene umgelegten Punkt a. Macht man eben so b′k senkrecht auf hl, fh = b″d und fk = b′h, so ist auch der Punkt b in k, und mithin die Linie ab nach ik in ihrer wahren Länge umgelegt (§. 25.).

Es ist klar, daß man eben so die Ebene auf die andere Seite der Trace hl, und auch um die Trace

lm in die vertikale Projectionsebene hätte umlegen können. In diesem letzten Falle wären dann a′c, b′d, und die Senkrechten von a″ und b″ auf lm die Catheten des rechtwinkeligen Dreiecks gewesen.

§. 27.

Es ereignet sich zuweilen, daß man außer den gewöhnlichen Projectionen eines Punktes, einer Linie rc. noch die Projectionen desselben Gegenstandes auf einer zweiten Vertikalebene, oder daß man, mit andern Worten, den Aufriß eines Gegenstandes noch von einer beliebigen Seite haben will. Soll man z. B. die Projection des Punktes a, Fig. 5., dessen gewöhnliche Projectionen a′, a″ sind, auf der Vertikalebene bcd bestimmen, so fälle man das Perpendikel a′a‴ auf die Trace bc und mache fa‴ = a″e, so ist a‴ die gesuchte Projection (§. 19. Nro. 1. 2.).

Es ist leicht einzusehen, daß man auf diese Weise jeden Gegenstand aus seinen gewöhnlichen Projectionen auf jede andere Vertikalebene projiciren kann. Siehe §. 99. 234. Wie man eine solche neue Projection auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene bestimmt, werden wir weiter unten sehen (§. 65.).

§. 28. Aufgabe.

Aus den Projectionen a′b′, a″b″ (Fig. 6. 7. 8.) einer Linie ab im Raume, die Durchschnitte dieser Linie mit den Projectionsebenen zu bestimmen.

Die Vertikalprojection des gesuchten Durchschnitts mit der Horizontalebene liegt in der Basis (§. 19. Nro. 3.). Da sie aber auch in der Vertikalprojection a″b″ oder ihrer Verlängerung liegt, so ist sie der Durchschnitt d″ dieser beiden Linien. Nun ist der Durchschnitt der Linie ab mit der Horizontalebene selbst seine Horizontalprojection (§. 19. Nro. 3.) und liegt

in der Senkrechten d''d', welche aus der Vertikalprojection d'' auf die Basis gezogen wird (§. 19. Nro. 1.). Endlich liegt der gesuchte Punkt nothwendig in der Horizontalprojection a'b' oder ihrer Verlängerung, mithin in dem Durchschnitte d' dieser Projection mit jenem Perpendikel d''d'. Eben so ist der Durchschnitt der Vertikalprojection a''b'' mit dem Perpendikel e'e'', welches man im Durchschnitt e' der Horizontalprojection a'b' mit der Basis auf diese errichtet, der Punkt, in welchem die Vertikalebene von der Linie ab geschnitten wird.

§. 29. Zusatz.

Aus diesem Verfahren folgt nachstehende leichte Regel zur Bestimmung des Durchschnittes einer Geraden mit einer der Projectionsebenen: Man verlängere die Projection der Linie in der andern Projectionsebene und errichte in dem Durchschnitte mit der Basis ein Perpendikel auf diese; der Durchschnitt desselben mit der Projection der Linie in der Projectionsebene, mit der man ihren Durchschnitt sucht, ist dieser Durchschnitt.

In Fig. 7. hat die Linie ab eine solche Lage im Raume, daß sie die Vertikalebene erst unter der Horizontalebene, und in Fig. 8. so, daß sie diese Ebene hinter jener schneidet. Das Verfahren bleibt dasselbe.

Anmerkung. Die so eben angegebene Regel zur Bestimmung des Durchschnittes einer Linie mit den Projectionsebenen reicht für den einen Fall nicht hin, wenn die Richtung der Projectionen senkrecht auf der Basis ist, wie a'b', a''b'' (Fig. 9.). Wenn nicht die Projectionen zweier Punkte einer solchen Linie bestimmt sind, so kann die Aufgabe aus den gewöhnlichen Projectionen der Linie nicht aufgelöst werden. Sind aber die Punkte a', a''; b', b'' die Projectionen zweier bestimmten Punkte der Linie, so lege man die Linie in

die Horizontalebene um, indem man a′d = a″c, b′e = b″c (Fig. 9.) und beide senkrecht auf a′b′ macht, sodann de bis zum Durchschnitt f mit a′b′ und g mit der Basis zieht; f ist nun der gesuchte Durchschnitt mit der horizontalen Projectionsebene, und ch = cg gemacht, gibt den Durchschnitt h mit der Vertikalebene, wie man leicht einsieht.

§. 30. Aufgabe.

Aus den Durchschnitten d′, e″ (Fig. 6. 7. 8.) einer Linie mit den beiden Projectionsebenen, ihre Projectionen zu bestimmen.

Man fälle von den Durchschnitten Senkrechte d′d″, e″e′ auf die Basis und verbinde die entstandenen Punkte d″, e′ mit den gegebenen Punkten durch Gerade d′e′, d″e″, so sind diese die gesuchten Projectionen, denn d′, e′ sind Punkte der Horizontalprojection und d″, e″ Punkte der Vertikalprojection (§. 29.).

§. 31. Aufgabe.

Den Winkel zu bestimmen, den eine Linie ab (a′b′, a″b″) (Fig. 6.) mit einer der Projectionsebenen, z. B. mit der Horizontalebene einschließt.

Man suche den Durchschnitt d′ der Linie mit der Horizontalebene (§. 29.); trage die Höhe b″f irgend eines Punktes b der Linie über jener Ebene in b′ senkrecht auf a′b′, also daß b′g = b″f ist, und ziehe gd′, so ist b′d′g der gesuchte Winkel; denn das Perpendikel von b auf die Horizontalebene, welches gleich b″f ist (§. 19. Nro. 2.), bildet mit der Linie bis zu ihrem Durchschnitt mit der Ebene und ihrer Projection b′d′ ein rechtwinkeliges Dreieck, das den gesuchten Winkel bei d′ enthält. Durch das beschriebene Verfahren wird nun dieses Dreieck um b′d′ in die horizontale Projectionsebene umgelegt, folglich der gesuchte Winkel bei d′ erhalten.

Kürzer ist folgendes Verfahren, das zugleich auch dann angewendet wird, wenn der Durchschnitt d′ über die Grenzen der Zeichnungsfläche hinausfällt. Man mache b′i gleich der Höhendifferenz b″h zweier Punkte a, b der Linie und ziehe a′i, so ist b′a′i dem Winkel bei d′ gleich, zeigt mithin die Größe des gesuchten Winkels an.

§. 32. Aufgabe.

Die wahre Länge einer Linie aus ihren Projectionen a′b′, a″b″ (Fig. 6.) zu bestimmen.

Die Linie a′i im vorigen §. ist zugleich diese gesuchte wahre Länge der zwischen den Punkten a, b enthaltenen Geraden im Raume. Um sich davon zu überzeugen, denke man sich den Punkt a gleichfalls nach k umgelegt, so ist offenbar kg = ab im Raume. Es ist aber a′i = kg, mithin auch a′i = ab. Das Dreieck a′b′i kann man auch leicht construiren, indem man a″h parallel mit der Basis zieht, hl = a′b′ macht und b″l zieht. Diese Linie ist nun gleichfalls die wahre Länge der Linie ab, so wie b″lh die Größe des Winkels ist, den sie mit der horizontalen Projectionsebene einschließt.

§. 33. Zusatz.

Ist die Linie mit einer Projectionsebene parallel, also ihre Projection auf der andern parallel mit der Basis (§. 20. Nro. 2.), so ist die Projection auf der Ebene, mit welcher die Linie parallel ist, zugleich die wahre Länge der Linie im Raume, wie man leicht einsehen kann. Wenn also die eine Projection einer Linie parallel mit der Basis ist, so ist die andere Projection die wahre Länge der Linie. In allen andern Fällen sind die Projectionen kürzer, als die entsprechende Linie, denn sie sind immer die eine Cathete eines recht-

winkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die wahre Linie im Raume ist.

Wie findet man die Länge einer Linie, wenn ein Theil derselben unterhalb der Horizontalebene liegt? Läßt sich diese Aufgabe nicht auch auflösen, wenn man die Basis parallel mit ihr selbst verrückt?

§. 34. Aufgabe.

Aus dem Durchschnitte einer Linie mit einer Projectionsebene, ihrer Projection darauf und dem Winkel, den sie mit dieser Ebene bildet, ihre andere Projection zu bestimmen.

§. 35. Aufgabe.

Die Vertikalprojection einer die Basis schneidenden Linie ab (Fig. 10.) aus ihrer Horizontalprojection ab' und dem Winkel w, den sie mit der Vertikalebene einschließt, zu finden.

Man mache den Winkel cad = w, und fälle von einem beliebigen Punkte d des Schenkels ad eine Senkrechte dc auf die Basis; denke sich nun das Dreieck cad so weit dergestalt um den Punkt a gedreht, daß es stets senkrecht auf der Vertikalebene bleibt und die Seite ac beständig in dieser Ebene hat, bis ad senkrecht über ab' zu liegen kommt. Alsdann hat ad die gesuchte Lage. Da bei dieser Bewegung der Punkt d stets den Abstand dc von der Vertikalebene behält, so rückt seine Projection in der mit der Basis parallelen Linie db' durch d fort, und ihr Durchschnittspunkt b' mit ab' ist offenbar die Projection des Punktes d, sobald ad die richtige Lage hat. Der Punkt c beschreibt im Halbmesser ac den Bogen cb'', in welchem die Vertikalprojectionen des Punktes d bei allen Lagen des Dreiecks cad liegen. Der Durchschnitt b'', des von b' auf die Basis gefällten Perpendikels mit diesem Bogen ist daher die Vertikalprojection des Punktes d bei der

richtigen Lage von ad (§. 19. Nro. 1.). Die gesuchte Vertikalprojection ist daher ab''.

§. 36. Aufgabe.

Aus der Horizontaltrace hl (Fig. 4.) einer Ebene und einem Punkte m ihrer Vertikaltrace, diese zu bestimmen, oder durch eine Gerade he in der horizontalen Projectionsebene und einen Punkt m in der vertikalen eine Ebene zu legen.

Man ziehe von m nach dem Durchschnitt l der gegebenen Trace oder Geraden mit der Basis eine Gerade, so ist sie die gesuchte Vertikaltrace (§. 21. Nro. 5.). Wäre die gegebene Trace mit der Basis parallel, so ist es auch die gesuchte (§. 21. Nr. 5.).

Ist aus Mangel an Raum kein Durchschnitt wie l möglich, so kann man in der Ebene des im Raume befindlichen Dreiecks mhe irgend eine Linie hn annehmen, indem man z. B. von den Projectionen h, h'' des Punktes h nach den Projectionen n, n' irgend eines Punktes n der Linie me gerade Linien zieht und aus ihnen, als den Projectionen der angenommenen Linie, deren Durchschnitt o mit der vertikalen Projectionsebene nach §. 29. bestimmen. Dieser Durchschnitt ist dann offenbar ein zweiter Punkt der gesuchten Vertikaltrace.

Aus den Projectionen eines Punktes einer Ebene und einer Trace derselben die andere Trace zu bestimmen?

§. 37. Aufgabe.

Aus den Tracen a'b, bc einer Ebene A (Fig. 11.) den Flächenwinkel derselben mit einer der Projectionsebenen, z. B. mit der horizontalen, zu finden.

Man errichte in einem beliebigen Punkte a' der Trace a'b eine Senkrechte a'd auf diese Linie und in d die Senkrechte dc auf bd, so sind diese beiden Linien

die Tracen einer Vertikalebene a'dc (§. 21.). In der Geometrie wird nun bewiesen, daß, wenn eine Linie wie a'b senkrecht auf dem Durchschnitte a'd zweier, einander senkrecht schneidenden Ebenen a'dc und a'bd ist und zugleich in der einen Ebene a'bd liegt, sie senkrecht auf der andern Ebene a'dc sei. Es ist also a'b senkrecht auf a'dc und daher auch senkrecht auf der Geraden zwischen a' und c, welche in dieser Ebene liegt. Da nun diese Gerade zwischen a' und c und die Linie a'd senkrecht auf dem Durchschnitte a'b der beiden Ebenen sind, deren Neigung gegen einander man sucht, und da sie zugleich in diesen Ebenen liegen, so schließen sie den gesuchten Winkel ein. Die Linie zwischen a' und c wird leicht dadurch nach a'e umgelegt, daß man de senkrecht auf a'd und gleich dc macht. w ist nun der gesuchte Winkel. Statt das Dreieck a'dc nach a'de umzulegen, hätte man es auch um dc nach dgc in die vertikale Projectionsebene drehen können, wodurch sich der gesuchte Winkel gleich dgc ergeben hätte.

Eben so wird verfahren, wenn die gegebenen Tracen mit der Basis parallel sind, oder wenn der Winkel a'bd stumpf ist? Im letzten Falle muß nur die Vertikaltrace abwärts verlängert werden.

§. 38. Aufgabe.

Aus der Horizontaltrace ab (Fig. 11.) einer Ebene und ihrem Flächenwinkel w mit der Horizontalebene, die Vertikaltrace zu bestimmen, oder durch eine in der Horizontalebene gegebene Gerade eine Ebene unter gegebener Neigung gegen jene Ebene zu legen.

Man ziehe eine Senkrechte ad auf ab, mache den Winkel dae = w; sodann de senkrecht auf ad, dc senkrecht auf bd und gleich de, so ist bc die gesuchte Trace (§. 36. 21. Nro. 5.).

Eben so verfährt man, wenn sich die gegebenen Stücke auf die vertikale Projectionsebene beziehen.

Fällt der Durchschnitt b der gegebenen Trace mit der Basis zu entfernt aus, so findet man durch Wiederholung desselben Verfahrens an einer andern Stelle einen zweiten Punkt der Vertikaltrace.

Wie wird der Winkel bestimmt, den beide Tracen einschließen?

§. 39. Aufgabe.

Aus der einen Trace, z. B. der Vertikaltrace einer Ebene und dem Winkel w (Fig. 11.), welchen diese Ebene mit derjenigen Projectionsebene einschließt, in der die unbekannte Trace liegt, diese Trace zu bestimmen; oder: durch eine in der vertikalen Projectionsebene gegebene Gerade eine Ebene unter bekannter Neigung gegen die Horizontalebene zu legen.

Aus einem beliebigen Punkte c der gegebenen Trace bc fälle man die Senkrechte cd auf die Basis; ziehe dann cg so, daß der Winkel cgd = w wird, und beschreibe mit dg einen Bogen aus d; so ist die Tangente ba von b an diesen Bogen die gesuchte Horizontaltrace. Der leichte Beweis der Richtigkeit dieser Auflösung bleibt dem Anfänger zu führen überlassen (§. 36. 37.).

Ist der Winkel w kleiner als cbd, so kann der Aufgabe nicht entsprochen werden. Warum nicht? Wird der Winkel w ein rechter, so ist die Vertikalebene selbst die gesuchte. Außer der Ebene a′bc kann noch eine der Aufgabe entsprechende Ebene durch bc gelegt werden. Auf welche Art?

Wie verfährt man, wenn die gegebene Trace mit der Basis parallel ist?

§. 40. Aufgabe.

Die Tracen der durch die drei Punkte (a′, a″),

(b′, b″), (c′, c″) (Fig. 12.) bestimmten Ebene A anzugeben.

Da die Ebene A außer ihren Tracen nichts mit den Projectionsebenen gemein hat, so können diese Ebenen von Linien in jener nur in den Tracen geschnitten werden, oder die Tracen gehen durch die Durchschnitte aller in der Ebene A liegenden Linien mit den Projectionsebenen. Man suche also nur die Durchschnitte d und e zweier Linien in der Ebene A, z. B. der Linien ab und ac mit der horizontalen Projectionsebene nach §. 29., so ist die Gerade de die gesuchte Horizontaltrace und f ein Punkt der Vertikaltrace (§. 21. Nro. 5.). Bestimmt man noch den Durchschnitt g einer in A liegenden Linie, z. B. der Linie bc mit der Vertikalebene, so ist fg die gesuchte Vertikaltrace.

Fallen die Durchschnitte der durch die Punkte gegebenen Linien mit den Projectionsebenen zu entfernt aus, so kann man in der Ebene des Dreiecks beliebige andere Linien annehmen und ihre Durchschnitte suchen (§. 36.).

§. 41. Zusatz.

Der vorige §. enthält zugleich die Auflösung des Falles, wenn eine Ebene durch eine beliebige Gerade und einen willkührlichen Punkt im Raume gelegt, oder wenn die Ebene zweier Geraden, die sich schneiden, bestimmt werden soll. Eben so verhält es sich, wenn die Ebene zweier Parallellinien anzugeben ist und diese Linien nicht selbst mit beiden Projectionsebenen zugleich parallel sind. Ist dieses letztere aber der Fall, so sind die Tracen mit ihnen parallel, weil sie, wie jene, Horizontallinien sind und in derselben Ebene liegen. Beide Tracen sind also mit der Basis parallel, und es kommt blos darauf an, von jeder einen Punkt zu haben. Solche Punkte sind nun die Durchschnitte ir-

gend einer in der Ebene der Parallinien liegenden, und nicht mit diesen parallelen Linie mit den Projectionsebenen.

§. 42. Aufgabe.

Die wahre Größe und Gestalt eines durch drei Punkte (a′, a″) (b′, b″) (c′, c″) (Fig. 12.) im Raume bestimmten Dreiecks abc zu finden.

Nachdem man nach §. 40. die Tracen df, fg der Ebene des Dreiecks bestimmt hat, lege man jeden der drei Punkte nach §. 26. um eine der Tracen in eine Projectionsebene, z. B. um die Horizontaltrace in die Horizontalebene um, so ist das erhaltene Dreieck a‴b‴c‴ das verlangte.

§. 43. Zusatz.

Auf dieselbe Art bestimmt man die wahre Größe und Gestalt jeder ebenen Figur im Raume. Es können aber die Projectionen einer vier- und mehrseitigen ebenen Figur nicht so, wie die eines Dreiecks, angenommen werden, weil die Ebene der Figur schon durch die Annahme von drei Punkten bestimmt ist. Um z. B. die Projectionen eines ebenen Vierecks anzunehmen, kann man in der Ebene eines durch drei Punkte gegebenen Dreiecks abc, Fig. 12., dadurch einen vierten Punkt erhalten, daß man in jener Ebene eine beliebige Linie bp zieht und auf deren Verlängerung jenseits p mit Rücksicht auf §. 5. einen Punkt annimmt und mit a und c verbindet.

Von einer krummen Begrenzungslinie muß man eine hinreichende Anzahl Punkte umlegen und mit einander verbinden, wenn sich nicht schon aus einigen derselben die ganze krumme Linie bestimmen läßt, wie dieses z. B. bei dem Kreise der Fall ist.

Ist die ebene Figur mit einer Projectionsebene parallel, also ihre Projection auf der andern eine mit

der Basis parallele Linie, so ist sie ihrer Projection auf ersterer congruent, weil alle Seiten und Diagonalen der Projection den entsprechenden Linien der Figur im Raume gleich sind (§. 34.).

§. 44. Aufgabe.

Eine Ebene E (Fig. 13.) liegt mit einer darin bestimmten Geraden ab in der horizontalen Projectionsebene und dreht sich um die Linie cd so lange aufwärts, bis sie mit dieser Ebene den Winkel w macht. Man soll die Projectionen der Linie ab bei dieser Lage der Ebene E angeben.

Der Punkt a beschreibt bei dieser Bewegung der Ebene E einen Kreisbogen, dessen Halbmesser die Senkrechte ac auf der Achse cd ist (§. 24.). Macht man den Winkel $aca''' = w$, so kann der mit ac aus c beschriebene Bogen aa''' als der vom Punkte a im Raume beschriebene, und in die horizontale Projectionsebene um ac umgelegte Bogen angesehen werden. Das Perpendikel $a'''a'$ von a''' auf ac gibt im Durchschnitt a' mit ac die Horizontalprojection des Punktes a nach der Drehung an, denn diese Projection liegt in ac (§. 23.). Das Perpendikel $a'''a'$ ist zugleich die Höhe des Punktes a über der Horizontalebene nach der Drehung; trägt man es daher von der Basis aus auf die von a' auf diese Linie gefällte Senkrechte $a'e$, so ergibt sich die Vertikalprojection a'' des Punktes a. Beschreibt man mit $cf = bd$ den Bogen fb''' und macht $b'''g$ senkrecht auf ac, $db' = cg$, so ist b' die Horizontalprojection des Punktes b, und $a'b'$ die der Linie ab nach der Drehung. Wird noch $b''b'$ senkrecht auf he und $hb'' = b'''g$ gemacht, so erhält man die Vertikalprojection b'' des Punktes b, und mithin auch die Vertikalprojection $a''b''$ der Linie ab.

§. 45. Aufgabe.

Die Linie ab (Fig. 14.) der vorigen Aufgabe liege nicht in der Ebene E, sondern mache einen Winkel mit derselben. a′b′, a″b″ seien ihre Projectionen; sie behalte ihre Lage gegen die Ebene E bei, während sich diese wieder um den Winkel w drehe; cd sei die Achse. Man soll die Projectionen der Linie ab nach der Drehung bestimmen.

Mit dem in der Ebene liegenden Punkte b verhält es sich, wie in der vorigen Aufgabe. In Bezug auf a (a′, a″) mache man a′a senkrecht auf a′c und gleich a″e, so hat sich gleichsam die Höhe des Punktes a über der horizontalen Projectionsebene mit dem von a′ beschriebenen Bogen in diese Ebene umgelegt und ist nach der Drehung in die auf a‴c senkrechte Lage a‴a^{IV} gekommen. Da der Punkt a in der Ebene des Kreisbogens liegt, den a′ beschreibt, so liegt die Projection von a nach der Drehung im Perpendikel a′c auf cd (§. 23.) und die auf a′c Senkrechte a^{IV}a' schneidet diese Projection im Punkte a' ab. Man hat also die Horizontalprojection a'b' und, wenn man a'a" senkrecht auf die Basis, fa" aber gleich a^{IV} a' macht, die Vertikalprojection a" des Punktes a nach der Drehung. Endlich zieht man noch die Vertikalprojection a"b" der Linie ab.

Dritter Abschnitt.

Betrachtung der Punkte, Linien und Ebenen in Beziehung auf ihre Durchschnitte und die verschiedenen Lagen, die sie gegen einander haben.

Aufgaben.

§. 46.

1) **Die Projectionen zweier Parallellinien sind parallel.**

Perpendikel von irgend einem Punkte jeder Linie auf eine Projectionsebene sind unter sich parallel. Die Linien im Raume bilden also mit diesen Perpendikeln Winkel, deren Schenkel parallel sind, folglich sind es auch die Ebenen dieser Winkel, mithin auch die Durchschnitte derselben mit einer dritten Ebene, nämlich mit einer Projectionsebene. Da aber diese Ebenen durch Perpendikel auf die Projectionsebenen gelegt sind, so sind sie darauf senkrecht und ihre Durchschnitte mit den Projectionsebenen sind die Projectionen der Linien (§. 8.).

2) **Umgekehrt: Die Linien im Raume sind parallel, wenn es ihre Projectionen in beiden Projectionsebenen sind.**

Die projicirenden Ebenen auf jeder Projectionsebene sind parallel, denn sie sind durch Parallellinien, nämlich durch die Projectionen, senkrecht auf eine dritte Ebene gelegt. Die vier Linien, in welchen sich die vier projicirenden Ebenen durchschneiden, sind unter sich parallel, weil je zwei derselben, die in einer Ebene liegen, die Durchschnitte zweier Parallelebenen mit einer dritten Ebene sind. Da nun die Linien im

Raume nichts anders, als die Durchschnitte ihrer projicirenden Ebenen, also zwei jener vier Parallellinien sind, so sind sie unter sich parallel.

3) Wenn aber die Projectionen zweier Linien nicht in jeder Projectionsebene zugleich parallel sind, so sind die Linien im Raume nicht parallel; denn wenn diese Linien parallel wären, so wären es auch, nach Nro. 1. ihre Projectionen in jeder Projectionsebene.

§. 47. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine Parallellinie mit einer Geraden zu ziehen.

Man ziehe durch die Projectionen des Punktes mit den Projectionen der Geraden in jeder Projectionsebene eine Parallellinie (§. 46.).

§. 48. Aufgabe.

Aus den Projectionen zweier Linien zu sehen, ob sich die Linien im Raume schneiden, oder nicht.

Da ein etwaiger Durchschnittspunkt beider Linien gemein ist, so muß auch jede seiner Projectionen in den respectiven Projectionen beider Linien zugleich, also in dem Durchschnitte derselben liegen; es müssen sich also die Projectionen in jeder Projectionsebene schneiden, und die Gerade zwischen diesen Durchschnitten muß senkrecht auf der Basis seyn (§. 18.).

Zwei Linien schneiden sich also nur dann im Raume, wenn die gerade Verbindungslinie der Durchschnitte ihrer Projectionen auf der Basis senkrecht ist, und es können sich also die Projectionen zweier Linien schneiden, ohne daß dieses mit den Linien selbst der Fall ist.

§. 49. Aufgabe.

Den Winkel zu bestimmen, den zwei Gerade (a′b′, a″b″), (b′c′, b″c″), (Fig. 15.), welche sich schneiden, mit einander bilden.

Man suche die Durchschnitte d und e beider Linien mit einer Projectionsebene, z. B. mit der horizontalen (§. 29.), und lege das im Raume bestimmte Dreieck bde um de in die Horizontalebene um. Zu dem Ende lege man blos den Punkt b nach b‴ um, indem man b′f senkrecht auf de, fg = b″h und fb‴ = b′g macht (§. 26.), so erhält man den Winkel db‴e als den gesuchten.

Es kann unter Umständen räthlich sein, die Schenkel des Winkels über die Spitze hinaus zu verlängern, und dann den Vertikalwinkel des gegebenen zu bestimmen.

Man soll einen Winkel halbiren; genügt es, seine Projectionen zu halbiren? Wenn man einen halbirten rechten Winkel um seinen in horizontaler Lage gedachten Schenkel dreht, so wird man auf die Beantwortung dieser Frage geleitet. Man bewege auch einen halbirten Winkel, dessen Schenkel gleiche Neigung gegen eine Projectionsebene haben, um die Trace seiner Ebene in dieser Projectionsebene.

§. 50. Aufgabe.

Aus den Winkeln x, y (Fig. 16.), welche zwei Gerade mit der horizontalen Projectionsebene einschließen, und dem Winkel z, den sie im Raume bilden, die Horizontalprojectionen der Linien, oder die Horizontalprojection des Winkels z zu finden.

Der Einfachheit wegen lege man die Vertikalebene durch die eine Linie. Man ziehe also die Basis so, daß sie den Winkel x mit dieser Linie macht, und neh-

me b'' als die Spitze des Winkels im Raume an, so ist ab' die Horizontalprojection dieses Schenkels. Der andere Schenkel ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Cathete $b''b'$ ist, und welches dieser Seite gegenüber den Winkel y enthält. Durch Construction dieses Dreiecks erhält man die Hypotenuse und die andere Cathete, welche die Länge der Horizontalprojection dieser Hypotenuse ist. Man ziehe also $b''c$ so, daß der Winkel $b''cb' = y$ wird, so ist $b'c$ die Länge jener Projection, und in dem mit $b'c$ aus b' beschriebenen Bogen cd liegt der Durchschnitt des andern Schenkels mit der Horizontalebene. Um diesen Punkt zu erhalten, mache man den Winkel $ab''e = z$ und $b''e = b''c$, so ist das Dreieck, welches durch die Spitze b'' des Winkels z, und die Durchschnitte seiner Schenkel mit der Horizontalebene bestimmt wird, um ab'' nach $ab''e$ in die Vertikalebene umgelegt, und ae ist die wahre Entfernung jener beiden Durchschnitte von einander. Da nun a der eine dieser Durchschnitte ist und der andere im Bogen cd liegt, so erhält man den zweiten in d, wenn man diesen Bogen mit ae aus a durchschneidet; $b''d$ ist jetzt die Projection des andern Schenkels und $ab'd$ die des Winkels z.

Dieß ist die graphische Auflösung der trigonometrischen Aufgabe: Einen beobachteten Winkel, dessen Schenkel nicht horizontal sind, auf den Horizont zu reduciren.

§. 51. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche unter gegebenen Winkeln gegen beide Projectionsebenen geneigt ist.

Statt des gegebenen Punktes nehme man vorläufig einen Punkt a (Fig. 17.) der Basis an, mache den

Winkel bac gleich demjenigen Winkel, welchen die Linie mit der Vertikalebene, und bad gleich jenem, den sie mit der Horizontalebene bilden soll; sodann mache man bd senkrecht auf ad, ziehe be′ parallel mit ac, durchschneide be′ aus a mit ad in b′, so ist ab′ die gesuchte Horizontalprojection und, wenn man b′b″ senkrecht auf ac und fb″ gleich bd macht, ab″ die Vertikalprojection.

Von der Richtigkeit dieser Construction überzeugt man sich so: Gesetzt, die Linie ginge schon, den Bedingungen entsprechend, durch a, und wäre, immer denselben Winkel mit der Vertikalebene bildend, bis in die Horizontalebene gedreht, so käme sie in die Richtung ab. Irgend ein Punkt b derselben behält während dieser Drehung stets die Entfernung bc von der Vertikalebene; seine Horizontalprojection rückt daher in der (mit ac parallelen Linie be′ fort. Um nun diese Projection zu finden, denke man sich das rechtwinkelige Dreieck, welches die Linie ab in der gesuchten Lage, ferner ihre Horizontalprojection als eine Cathete und zwischen beiden den Winkel enthält, den die Linie mit der Horizontalebene einschließen soll. Durch die angegebene Construction ist abd dieses Dreieck, also ad die Länge der gesuchten Horizontalprojection und bd die Höhe des Punktes b über der Horizontalebene, wenn ab die gesuchte Lage hat. Da nun, wie gesagt, die Horizontalprojection des Punktes b in be′ liegen und die Entfernung ad von a haben muß, so darf man nur be′ aus a mit ad in b′ durchschneiden. Das übrige folgt von selbst.

Da man nun be′ auch noch in e′ mit ad durchschneiden kann, so entsprechen auch ae′, ae″ als Projectionen der Aufgabe, wenn e′e″ senkrecht auf ac und ge″ = bd gemacht wird. Da ferner dieselbe

Operation auch hinter der Vertikalebene gemacht werden kann, so sieht man, daß es im Ganzen vier Lagen gibt, in denen eine Linie den gegebenen Bedingungen entspricht, und daß also noch eine dieser Lagen näher bezeichnet werden muß, wenn die Aufgabe ganz bestimmt seyn soll.

Soll nun die Linie statt durch a, durch einen beliebigen Punkt gehen, so darf man nur durch dessen Projectionen Parallellinien mit den gefundenen Projectionen der durch a gehenden Linie ziehen, weil alle Parallellinien gleiche Neigung gegen die Projectionsebenen haben.

Uebrigens wird man leicht einsehen, daß die Summen der zwei gegebenen Winkel nicht größer als 90° sein kann, wenn man bedenkt, daß dann beide Projectionen der Linie senkrecht auf der Basis sind.

§. 52. Aufgabe.

Durch einen Punkt b′, b″ (Fig. 12.) nach einer Geraden a′c′, a″c″ eine Linie so zu ziehen, daß beide den Winkel w einschließen.

Man lege, wie in §. 42., das durch den Punkt b und die Linie ac, oder zwei Punkte a, c derselben im Raume bestimmte Dreieck abc nach a‴b‴c‴ um, ziehe hier b‴p‴ so, daß der Winkel b‴p‴c‴ = w wird. Da sich nun bei der Zurückbewegung des Dreiecks in seine vorige Lage, der Punkt p‴ in einem Bogen bewegt, dessen Halbmesser die Senkrechte p‴q auf de ist (§. 23.); so wird durch diese Senkrechte die Horizontalprojection p′ der gesuchten Winkelspitze p, und durch das Perpendikel p′p″ auf die Basis die Vertikalprojection p″ derselben erhalten; mithin sind b′p′, b″p″ die Projectionen der verlangten Linie.

Setzt man w = 90°, so hat man vom Punkt b ein Perpendikel auf ac gefällt und erhält in b‴p″

zugleich den wahren Abstand jenes Punktes von dieser Linie. Später (§. 67.) werden wir sehen, wie sich noch auf eine andere Art ein solches Perpendikel fällen läßt.

§. 53. Aufgabe.

Aus der Horizontalprojection f′ (Fig. 11.) eines in der Ebene a′bc liegenden Punktes f, dessen Vertikalprojection zu bestimmen.

Man ziehe durch f′ eine Linie ad, welche die Trace a′b und die Basis schneidet, und sehe sie als die Projection einer in der Ebene a′bc liegenden und durch den Punkt f gehenden Linie A an. a′ ist offenbar der Durchschnitt dieser Linie mit der Horizontalebene und a″ die Vertikalprojection dieses Durchschnittes, also auch ein Punkt der Vertikalprojection der Linie A. d ist die Horizontalprojection des Durchschnitts der Linie A mit der Vertikalebene. Da nun dieser Durchschnitt in der Trace bc liegt, so wird er in c durch das Perpendikel dc auf bd erhalten. Man hat demnach zwei Punkte a″ und c der Vertikalprojection der Linie A und daher diese Projection a″c selbst; darin wird nun die gesuchte Vertikalprojection f″ des Punktes f durch das Perpendikel f′f″ auf die Basis erhalten. Vergleiche §. 58.

Sind die gegebenen Tracen mit der Basis parallel, wie ef, gh, Fig. 22., und ist i′ die Horizontalprojection des fraglichen Punktes, so durchschneide man mit einer Vertikalebene i′kg die Basis senkrecht und lege das rechtwinkelige Dreieck, welches durch die gegebene Ebene und durch die Projectionsebenen von ihr abgeschnitten wird, nach ekg′ um. Errichtet man nun auf i′k das Perpendikel i i bis zu eg′, so ist i der umgelegte Punkt und i′i ist seine Höhe über der Horizontalebene. Seine Vertikalprojection ist nun leicht anzugeben.

§. 54. Zusatz.

Von den Projectionen eines in einer bekannten Ebene liegenden Punktes kann man also nur eine willkührlich annehmen, weil die andere, wie diese Aufgabe zeigt, daraus folgt und daher nicht beliebig ist.

Wie bestimmt man aus der einen Projection einer in einer bekannten Ebene liegenden Geraden oder geradlinigen Figur, ihre andere Projection? Ist die bekannte Ebene vertikal, so ist diese Aufgabe unbestimmt.

Wie untersucht man, ob ein durch seine Projectionen gegebener Punkt in einer gegebenen Ebene liegt, oder nicht?

§. 55. Aufgabe.

Den Durchschnitt a einer Linie b′c′, b″c″ (Fig. 18.) mit der Ebene d′ef zu finden.

d′c′ ist die Horizontalprojection des Durchschnitts der Vertikalebene durch bc mit der Ebene d′ef; seine Vertikalprojection d″f ergibt sich eben so, wie die der Linie A (§. 53.), und enthält nothwendig die gesuchte Vertikalprojection des Durchschnitts a, weil sie die Projection einer Linie ist, die durch den Punkt a geht. Nun liegt aber die Vertikalprojection von a auch in b″c″, also im Durchschnitt a″. Die Horizontalprojection a′ ergibt sich nun leicht.

§. 56. Zusatz.

Man hätte eben so gut erst die Horizontalprojection a′ (Fig. 18.) und dann die Vertikalprojection a″ suchen können, wenn man in der Vertikalebene vorgenommen hätte, was hier in der Horizontalebene geschehen ist. Dieß wird z. B. nöthig, wenn der Durchschnitt c′ von b′c′ mit der Basis zu entfernt ausfällt, oder gar nicht möglich wird, welches Letztere der Fall ist, wenn b′c′ mit der Basis parallel wird. Unter die-

ser letzten Voraussetzung kann jedoch auch das erstere Verfahren beibehalten werden, weil d''a'' parallel mit ef wird, wenn b'c' mit ec' parallel ist. Wie läßt sich diese Behauptung beweisen? Vergleiche §. 57.

Wie verfährt man, wenn beide Projectionen der Linie mit der Basis parallel sind, oder wenn die Linie auf einer der Projectionsebenen senkrecht ist, oder wenn die Linie in einer auf beiden Projectionsebenen senkrechten Ebene liegt?

§. 57. Aufgabe.

Durch einen Punkt a', a'' (Fig. 19.) einer Ebene bcd'' eine Parallellinie A mit einer Projectionsebene, z. B. mit der horizontalen, in der Ebene bcd'' zu ziehen.

Die Trace bc ist eine in der Ebene bcd'' liegende Horizontallinie, mithin ist die zu ziehende Linie A mit ihr parallel, und also auch die Horizontalprojection a'd' von A mit der Projection der Trace bc, d. h. mit dieser Linie selbst parallel (§. 46.) und geht durch a'. Die Vertikalprojection a''d'' geht durch a'' und ist mit der Basis parallel (§. 20. Nro. 2.).

§. 58. Zusatz.

Zufolge §. 54. wäre in dieser Aufgabe nur die eine Projection des Punktes a nöthig gewesen, weil die andere daraus folgt. Mit Hülfe der letzten Aufgabe kann die Aufgabe §. 53. leicht aufgelöst werden. Die Horizontallinie A im vorigen §. schneidet offenbar die Vertikalebene in der Trace cd'' (Fig. 19.) und der Punkt d' der Horizontalprojection a'd' ist die Horizontalprojection dieses Schneidepunktes, mithin gibt der Durchschnitt d'' des in d' auf die Basis errichteten Perpendikels mit cd'' den Schneidepunkt selbst. Da nun die Vertikalprojection der Linie A durch d'' geht und mit der Basis parallel ist, so kann sie leicht ge-

zogen werden. In ihr liegt die Vertikalprojection des Punktes a der Ebene bcd'', mithin im Durchschnitte a'' der auf der Basis Senkrechten a'a''.

Wie verfährt man, wenn statt der Horizontalprojection a' des Punktes a, seine Vertikalprojection a'' gegeben wird?

§. 59. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine, mit einer Ebene parallele, Horizontallinie zu ziehen.

Denkt man sich durch den Punkt eine mit der gegebenen Ebene parallele Ebene gelegt, so liegt darin die gesuchte Linie, und ihre Horizontalprojection ist mit der Horizontaltrace dieser Ebene parallel, weil beide horizontale Linien in einer Ebene sind. Nun ist aber diese neue Trace mit der gegebenen Horizontaltrace parallel, mithin ist auch die gesuchte Linie mit ihr parallel, daher endlich ihre Horizontalprojection mit der Horizontalprojection dieser Trace, d. h. mit dieser Trace selbst parallel. Man darf also nur durch die Horizontalprojection des Punktes eine Parallellinie mit der Horizontaltrace, und durch seine Vertikalprojection eine Parallellinie mit der Basis ziehen. Ganz ähnlich wird verfahren, wenn die Linie statt horizontal, mit der vertikalen Projectionsebene parallel sein soll.

§. 60. Aufgabe.

Durch einen Punkt e', e'' (Fig. 19.) eine Ebene A parallel mit der Ebene bcd'' zu legen.

Da die Tracen zweier Parallelebenen die Durchschnitte derselben mit zwei andern Ebenen sind, so darf man nur einen Punkt jeder Trace suchen und durch ihn eine Parallellinie mit der gegebenen Trace in der nämlichen Ebene ziehen. Ein solcher Punkt der Vertikaltrace ist der Durchschnitt f', einer durch den Punkt

c mit bcd″ parallelen Horizontallinie mit der Vertikalebene, weil diese Horizontallinie in der zu legenden Ebene liegt. Man findet ihn nach §. 59. Nun ziehe man die Trace f″g parallel mit cd″ und, da g ein Punkt der Horizontaltrace gh ist (§. 11. Nr. 5.), diese selbst parallel mit bc.

Statt in der gegebenen Ebene eine Horizontallinie zu ziehen, kann es darin auch irgend eine andere Linie sein, also am einfachsten eine der Tracen. Zieht man dann durch den gegebenen Punkt eine Parallellinie, indem man durch seine Projectionen Parallellinien mit den Projectionen jener Linie, also mit der Trace selbst und mit der Basis zieht, so ist der Durchschnitt dieser Linie mit einer Projectionsebene ein Punkt einer der gesuchten Tracen. Man sieht, daß diese Auflösung im Grunde einerlei mit der gegebenen ersten ist.

Wie verfährt man, wenn die gegebenen Tracen mit der Basis parallel sind?

§. 61. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Ebenen zu bestimmen.

1r Fall. Wenn sich die Tracen schneiden.

Da die Durchschnitte a und b (Fig. 20.) der Tracen Punkte beider Ebenen, also auch ihres Durchschnittes sind, so schneidet dieser die Projectionsebenen in a und b; seine Projectionen ab′, a″b ergeben sich daher nach §. 30.

2r Fall. Wenn zwei in einer Projectionsebene liegende Tracen ab, de (Fig. 21.) parallel sind.

Denkt man sich durch die Trace de eine Parallelebene mit abc, so werden diese beiden Ebenen von der Ebene edc in Parallellinien geschnitten, deren eine de ist; die andere ist der gesuchte Durchschnitt; er geht

durch c (1r Fall) und ist horizontal, weil er mit der Horizontalen de parallel ist. c′ ist die Horizontalprojection von c, mithin ist c′f′, parallel mit ab, die Horizontalprojection und cf′, parallel mit der Basis, die Vertikalprojection des gesuchten Durchschnitts.

3r. Fall. Wenn die Tracen in jeder Projectionsebene parallel sind (Fig. 22.).

In diesem Falle sind die Tracen auch mit der Basis parallel, weil sonst die Ebenen parallel wären und sich demnach nicht schneiden könnten. Der gesuchte Durchschnitt ist, zufolge des 2ten Falles, mit allen Tracen, und mithin auch mit der Basis parallel. Es kommt also nur darauf an, einen Punkt desselben zu finden. Diesen erhält man leicht auf folgende Art. Es seien ab, cd die Tracen der einen, ef, gh die der andern Ebene. Man durchschneide diese Ebenen mit einer auf ihnen senkrechten Vertikalebene akg, und lege die Schnitte um, indem man kc′ = kc, kg′ = kg macht, ac′, eg′ zieht, so ist deren Durchschnitt i ein Punkt des gesuchten Durchschnitts. Denkt man sich die Ebene wieder aufgestellt, so erhält man die Horizontalprojection i′ und, wenn man ki″ = ii′ macht, die Vertikalprojection i″ des Punktes i. Man ziehe nun noch durch die Punkte i′, i″ Parallellinien mit der Basis, so sind sie die Projectionen des gesuchten Durchschnitts.

4r Fall. Wenn sich die Tracen abc, def (Fig. 23.) nicht mehr auf der Zeichnungsfläche schneiden.

Man durchschneide beide Ebenen mittelst einer beliebigen Horizontalebene A; ihre Vertikaltrace gh ist parallel mit der Basis, und enthält zugleich die Vertikalprojectionen der Linien, in denen A die gegebenen Ebenen schneidet. Diese Linien schneiden offenbar die

Vertikalebene in g und h, weil dieses Punkte beider Ebenen sind; sie schneiden sich selbst in dem gesuchten Durchschnitt, und da sie horizontal sind und in den gegebenen Ebenen liegen, so sind sie selbst und ihre Horizontalprojectionen mit den Horizontaltracen parallel (§. 57.). Zieht man also durch die Horizontalprojectionen g', h' ihrer Durchschnitte mit der Vertikalebene Parallellinien g'i', h'i' mit den Tracen, so sind sie die Projectionen jener Durchschnitte der Ebene A mit den gegebenen Ebenen, und ihr Durchschnitt i', so wie i'', entspricht einem Punkt des gesuchten Durchschnittes der Ebenen. Auf gleiche Weise sucht man die Projectionen k', k'' eines zweiten Punktes und erhält durch ihre Verbindung mit i', i'' die gesuchten Projectionen i'k', i''k'' der Kante oder des Durchschnitts beider Ebenen. — Die beiden Hülfsebenen hätten eben so gut parallel mit der vertikalen Projectionsebene angenommen werden können.

Einige andere Fälle aufzulösen, wird dem denkenden Anfänger nicht schwer fallen. Z. B. wenn beide Ebenen auf einer Projectionsebene senkrecht sind; wenn die Horizontaltracen verlängert sich oberhalb der Basis schneiden; wenn die Tracen der einen Ebene mit der Basis parallel laufen; wenn die vier Tracen sich in einem und demselben Punkte der Basis vereinigen.

§. 62. Aufgabe.

Durch eine Linie a'b', a''b'' (Fig. 24.) eine Ebene A so zu legen, daß sie die Horizontalebene unter dem Winkel w schneidet.

Senkrechte af, a'f von irgend einem Punkte a der Linie ab und seiner Projection a' auf die Horizontaltrace der Ebene A müssen den Winkel w einschließen. Diese Senkrechten machen mit der Höhe aa' = a''c

des Punktes a über der Horizontalebene ein rechtwinkeliges Dreieck, in welchem der Winkel w dieser Höhe gegenüber liegt. Durch Construction dieses Dreiecks in a'c'd' erhält man die Länge a'd' der in der Horizontalebene liegenden Cathete, auf welcher die Horizontaltrace der Ebene A senkrecht sein muß. Da diese Trace auch durch den Durchschnitt e der Linie ab mit der Horizontalebene gehen muß, so zieht man nur von diesem Punkte an den mit a'd' aus a' beschriebenen Kreis eine Tangente ef; sie ist die gesuchte Horizontaltrace und ihr Durchschnitt g mit der Basis ein Punkt der Vertikaltrace, welche außerdem noch durch den Durchschnitt h der Linie ab mit der Vertikalebene geht.

Da man von e zwei Tangenten an den Kreis ziehen kann, so gibt es auch zwei Ebenen, welche der Aufgabe Genüge leisten.

Fällt der Durchschnitt e zu entfernt aus, so kann man auf dieselbe Weise einen zweiten Kreis beschreiben und dann an beide Kreise eine Tangente ziehen.

§. 63.

1) Wenn eine Linie a auf einer Ebene A senkrecht ist, so sind ihre Projectionen auf den Tracen dieser Ebene senkrecht.

Die projicirende Ebene B der Linie a ist, da sie durch ein Perpendikel a auf A gelegt ist, senkrecht auf A, und auf der betreffenden Projectionsebene ist sie es ohnehin; sie schneidet also diese zwei Ebenen zugleich senkrecht, folglich ist deren Durchschnitt, d. i. die betreffende Trace von A auf ihr und also auch auf der in ihr liegenden Projection der Linie a im Raume senkrecht.

2) Umgekehrt: Wenn die Projectionen einer Linie a auf den respectiven Tracen

einer Ebene A senkrecht sind, so ist die Linie a auf dieser Ebene senkrecht.

Aus der Geometrie ist bekannt, daß eine Linie senkrecht auf einer von zwei einander senkrecht schneidenden Ebenen ist, wenn sie in der andern Ebene liegt und zugleich auf dem Durchschnitte beider Ebenen senkrecht ist. Eine solche Linie ist nun hier jede Trace der Ebene A in Bezug auf die entsprechende Projectionsebene, die projicirende Ebene und den Durchschnitt beider. Da nun dieser Durchschnitt nichts anders als die Projection der Linie a im Raume, und die Trace senkrecht auf dieser Projection ist, so ist diese Trace und daher auch die durch sie gelegte Ebene A auf der projicirenden Ebene senkrecht, also auch diese auf der Ebene A. Ebenso ist die andere projicirende Ebene senkrecht auf A, folglich auch der Durchschnitt beider, d. i. die Linie a im Raume.

Dieser Satz erleidet eine Ausnahme, wenn die Ebene mit der Basis parallel ist, denn dann sind auch die Projectionen einer schief auf ihr stehenden Linie, welche in einer auf der Basis senkrechten Ebene liegt, senkrecht auf den Tracen jener Ebene.

3) Sind aber nicht beide Projectionen einer Linie a auf den betreffenden Tracen einer Ebene A zugleich senkrecht, so ist auch die Linie a nicht senkrecht auf der Ebene A; denn wenn sie darauf senkrecht wäre, so wären auch, nach Nro. 1., ihre Projectionen auf den Tracen senkrecht.

§. 64. Aufgabe.

In einem Punkte einer Ebene eine Senkrechte auf diese Ebene zu errichten, oder von einem beliebigen Punkte ein Perpendikel auf diese Ebene zu fällen.

Man ziehe durch die Projectionen des Punktes senkrechte Linien auf die entsprechenden Tracen der Ebene,

so sind sie die Projectionen der gesuchten Senkrechten (§. 63.).

§. 65. Zusatz.

Bestimmt man noch den Durchschnitt einer solchen, von einem Punkte auf eine Ebene gefällten Senkrechten mit dieser Ebene, so zeigt der vorige §. zugleich die Auflösung der im §. 27. erwähnten Aufgabe: Aus den gewöhnlichen Projectionen eines Punktes, dessen Projection auf einer gegen den Horizont geneigten Ebene zu bestimmen.

Wie wird der Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmt? §. 64. 55. 32.

§. 66. Aufgabe.

Durch einen Punkt c′, c″ (Fig. 25.) einer Linie a′b′, a″b″, oder durch einen beliebigen Punkt g′, g″ eine Ebene senkrecht auf die Linie zu führen.

Man denke sich durch den gegebenen Punkt, in der durch ihn zu legenden Ebene, eine Horizontallinie g′d′, g″d″, so ist sie mit der Horizontaltrace dieser Ebene parallel (§. 57.) und da diese Trace senkrecht auf a′b′ sein muß (§. 63.), so muß auch die Projection g′d′ jener Horizontallinie senkrecht auf a′b′ sein, und kann daher leicht gezogen werden. Ihr Durchschnitt d″ mit der Vertikalebene ist ein Punkt der Vertikaltrace d″e, die senkrecht auf a″b″ gezogen wird und den Punkt e der Horizontaltrace ef gibt, welche gleichfalls senkrecht auf a′b′ ist; d″ef ist demnach die gesuchte Ebene.

Auf ganz ähnliche Weise hätte man auch zuerst die Horizontaltrace und daher auch jede Trace für sich bestimmen können. Dieß kann nöthig werden, wenn der Punkt e zu entfernt ausfallen würde.

§. 67. Zusatz.

Mit Hülfe dieser Aufgabe kann leicht von einem Punkte eine Senkrechte auf eine Linie gefällt, also der

Abstand eines Punktes von einer Geraden gefunden werden. Nachdem nämlich durch den Punkt eine Ebene senkrecht auf die Linie geführt ist, bestimme man den Durchschnitt beider, und ziehe vom gegebenen Punkte eine Gerade dahin, so ist sie die verlangte Senkrechte, wie leicht einzusehen ist. Dieß ist demnach eine zweite Auflösung der Aufgabe in §. 52.

Liegt die gegebene Linie ab in einer bekannten Ebene, so kann mittelst §. 66. auch die Aufgabe: In einem Punkte c einer in einer bekannten Ebene liegenden Geraden eine Senkrechte auf diese Linie in der Ebene zu errichten? aufgelöst werden. Diese Senkrechte ist, wie man leicht einsieht, nichts anders, als der Durchschnitt der im Punkt c auf ab senkrechten Ebene mit der gegebenen Ebene und wird nach §. 61. erhalten.

§. 68. Aufgabe.

Die Neigung einer Linie gegen eine Ebene zu finden.

Man fälle von einem Punkte der Linie ein Perpendikel auf die Ebene (§. 64.), bestimme dessen Durchschnitt und den der gegebenen Linie mit der Ebene (§. 55.), so wird durch diese Durchschnitte und jenen Punkt der Linie ein rechtwinkeliges Dreieck bestimmt, welches, nach §. 42., in eine Projectionsebene umgelegt, den gesuchten Winkel gibt.

Die wirkliche Ausführung dieser Auflösung auf dem Papier ist für den Anfänger in mehrfacher Hinsicht sehr belehrend; denn sie erfordert nicht blos die Wiederholung mehrerer vorhergegangenen Aufgaben, sondern ist überdieß sehr geeignet, zu zeigen, ob der Ausführende richtig und genau verfahren hat. Das umgelegte Dreieck muß nämlich genau rechtwinkelig sein.

§. 69. Aufgabe.

Den Winkel zu bestimmen, welchen zwei Ebenen adb und acb (Fig. 26.) einschließen.

Man suche die Horizontalprojection ab' des Durchschnitts beider Ebenen (§. 61.). Denkt man sich diesen Durchschnitt durch eine Ebene A senkrecht geschnitten, so wird in dieser Ebene durch die beiden Ebenen und eine Projectionsebene ein Dreieck begrenzt, das den gesuchten Winkel enthält und in diese Projectionsebene umzulegen ist. Die Trace de dieses Dreiecks ist an einer beliebigen Stelle f senkrecht auf ab' (§. 63.). Es kommt nun darauf an, den Punkt i zu bestimmen, in welchem die Kante ab beider Ebenen von der Ebene A geschnitten wird, weil er die Spitze des gesuchten Winkels ist. Obgleich er nach §. 55. bestimmt werden könnte, so kann man doch hier folgenden kürzeren Weg einschlagen.

Die Linie fi, welche im Dreieck dei nach der Kante im Raume gezogen werden kann, ist, gleich der Ebene dieses Dreiecks, senkrecht auf der Kante. Legt man daher das durch die Kante und den Punkt b' im Raume bestimmte Dreieck abb' um ab' nach ab'b'' um, indem man b'b'' senkrecht auf ab' und gleich b'b macht, so ist die Senkrechte fi'' von f auf die umgelegte Kante ab'', jene Linie fi, und folglich i'' derjenige Punkt der umgelegten Kante, welcher die Spitze des gesuchten Winkels bildet. Seine Horizontalprojection i', die man indessen nicht nöthig hat, wird durch das Perpendikel i''i' auf ab' bestimmt. fi'' ist nun die Entfernung der Spitze des Winkels von der Trace de. Legt man das im Raume befindliche Dreieck die um de um, so fällt die Spitze i in ab' und wird darin erhalten, indem man fi''' = fi'' macht. di'''e ist nun der gesuchte Winkel.

Ganz ähnlich wie hier in der horizontalen Projectionsebene verfahren wurde, läßt sich auch in der vertikalen operiren. Ueberdieß ist es nützlich, den bekann-

ten Ebenen recht verschiedene Lagen zu geben, z. B. die am Schlusse von §. 61. angedeuteten.

Diese Aufgabe läßt sich auch auf folgende Art auflösen. Man fälle von einem beliebigen Punkte zwischen beiden Ebenen Perpendikel auf beide (§. 64.) und bestimme den Winkel, welchen sie einschließen (§. 49.). Die Ergänzung dieses Winkels zu 180° ist nun der gesuchte Winkel.

§. 70. Aufgabe.

Durch eine in einer Ebene adb gegebene Linie ab′, a″b (Fig. 26.) eine Ebene so zu legen, daß sie mit jener einen gegebenen Winkel w einschließt.

Aus der Auflösung der vorigen Aufgabe kann das hier anzuwendende Verfahren leicht abstrahirt und eingesehen werden. Man ziehe nämlich de an einer beliebigen Stelle senkrecht auf ab′ und, nachdem man das Dreieck abb′ nach ab′b″ umgelegt hat, fälle man von f eine Senkrechte fi″ auf ab″ und mache ihr fi‴ gleich, so ist di‴ ein Schenkel des Winkels. Man mache daher den Winkel di‴e = w, so schneidet der Schenkel i‴e auf de den Punkt e der gesuchten Horizontaltrace ab, die nun, durch a und e gezogen, den Punkt c der Vertikaltrace gibt, den man mit b vergindet.

§. 71. Aufgabe.

Aus den Projectionen a′b′, a″b″ (Fig. 27.) einer Linie und der Horizontalprojection c′d′ einer andern, mit ihr auf einen gegebenen Abstand parallelen Linie A, die Vertikalprojection der letzteren zu finden.

Man durchschneide die Linie ab mittelst einer Ebene efg senkrecht, indem man deren Tracen senkrecht auf die Projectionen zieht (§. 63.); lege hierauf diese Ebene sammt ihrem Durchschnitt b′, b″ mit der Linie ab, und

dem Durchschnitt mit der projicirenden Ebene durch c'd', in die Horizontalebene um, so kommt jener Durchschnitt in den Punkt b, dieser aber in c'd' zu liegen. Nun durchschneide man c'd' aus b mit dem gegebenen Abstande; dieß geschieht in den Punkten h und i; mithin gibt es zwei Linien, die der Aufgabe genügen. Die Punkte h und i sind offenbar die umgelegten Durchschnitte dieser beiden Linien mit der Ebene efg. Dreht man diese Ebene wieder in ihre vorige Lage zurück, so werden die Horizontalprojectionen h', i', dieser Durchschnitte erhalten. Ihre Vertikalprojectionen h'', i'' bestimmt man nach §. 53., und zieht durch sie h''c'' und i''c'' mit a''b'' parallel, so hat man die gesuchten Vertikalprojectionen.

Später (§. 247.) lernen wir noch eine andere Auflösung dieser Aufgabe kennen.

§. 72. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche unter gegebenen Winkeln gegen beide Projectionsebenen geneigt ist.

Denken wir uns die verlangte Ebene bereits gelegt, und von einem Punkte der Basis Senkrechte auf sie und ihre Tracen gefällt, so werden durch die drei mit der Ebene und ihren Tracen entstandenen Durchschnittspunkte und durch den Punkt in der Basis zwei rechtwinkelige Dreiecke bestimmt, denen das Perpendikel auf der Ebene gemeinschaftlich ist, und welche ihm gegenüber die Neigungswinkel der Ebene gegen die Projectionsebene enthalten. Die andern spitzen Winkel dieser Dreiecke sind offenbar die Neigungen des Perpendikels auf der Ebene gegen die Projectionsebenen. Hieraus ergibt sich folgende Auflösung der Aufgabe. Man führe durch den gegebenen Punkt nach §. 51.

eine Gerade, deren Neigungen gegen die Projectionsebenen die Ergänzungen der gegebenen Winkel zu 90° sind, und lege sodann, nach §. 66., durch den gegebenen Punkt eine Ebene senkrecht auf diese Linie, so ist sie die verlangte.

§. 73. Aufgabe.

Die Entfernung zweier Parallelebenen zu bestimmen, und mit einer Ebene auf einen gegebenen Abstand eine parallele Ebene zu legen.

§. 74. Aufgabe.

Durch eine von zwei Linien a′b′, a″b″ und c′d′, c″d″ (Fig. 28.), welche nicht parallel sind und sich nicht schneiden, z. B. durch a′b′, a″b″ eine Ebene A mit der andern c′d′, c″d″ parallel zu legen.

Man ziehe durch irgend einen Punkt a′, a″ der Linie ab eine Parallellinie a′e, a″e″ mit der andern c′d′, c″d″ (§. 47.). Durch a′e′, a″e″ und a′b′, a″b″ wird nun die verlangte Ebene bestimmt, denn wenn eine Linie (cd) mit einer andern (ae) parallel ist, so kann sie eine durch diese Linie gelegte Ebene nicht schneiden, ist also parallel mit ihr, wenn sie nicht darin liegt. Die Tracen f′g, gh″ der Ebene sind nach §. 39. bestimmt worden. Da beide Linien ab und ae die Horizontalebene in einem und demselben Punkte a schneiden, so wurde noch der Durchschnitt f′ einer andern beliebigen Linie b′e′, b″e″ in der Ebene jener Linien, mit der Horizontalebene gesucht.

§. 75. Aufgabe.

Den Ort und die Größe des kürzesten Abstandes zweier Linien ab und cd (Fig. 28.), die, wie in der vorigen Aufgabe, nicht in einer Ebene liegen, d. h. die Linie zu finden, welche auf beiden zugleich senkrecht ist.

Man lege durch die eine der beiden Linien, z. B.

durch ab, eine parallele Ebene h'gh'' mit der andern (§. 74.). Von einem beliebigen Punkte d', d'' der Linie c'd', c''d'' fälle man ein Perpendikel d'h', d''h'' auf diese Ebene (§. 64.) und suche seinen Durchschnitt n', n'' mit derselben (§. 55.). Eine Ebene A durch dieses Perpendikel und die Linie cd gelegt, schneidet die Ebene h'gh'' in einer Linie no, die durch den Durchschnittspunkt n des Perpendikels geht und mit cd parallel ist; ihre Projectionen n'o', n''o'' sind daher mit c'd', c''d'' parallel (§. 46.). Da no parallel mit cd, diese Linie aber nicht parallel mit ab ist, so ist es auch no nicht und wird daher, mit ab in einer und derselben Ebene liegend, diese Linie in irgend einem Punkte o (o', o'') schneiden. Ein Perpendikel op (o'p', o''p'') in diesem Punkte auf die Ebene h'gh'' errichtet (§. 64.), steht senkrecht auf der darin liegenden Linie ab, ist parallel mit dem Perpendikel d'n', d''n'', liegt also mit ihm in der Ebene A und schneidet, wie das Perpendikel dn, die Linie cd (c'd', c''d'') in einem Punkte p (p', p'') rechtwinkelig; es ist mithin die verlangte Entfernung. Seine Projectionen o'p', o''p'' sind mit d'n', d''n'' parallel (§. 46.). Da die Punkte o', o'', p', p'' unabhängig von einander erhalten werden, so kann man, zur Prüfung der richtigen Arbeit, untersuchen, ob sie in Senkrechten auf der Basis liegen (§. 18.).

§. 76. Zusatz.

Die Auflösung der Aufgabe im vorigen §. wird ziemlich erleichtert, wenn man die projicirende Ebene der einen Linie als vertikale Projectionsebene annimmt, also die gewöhnlichen Vertikalprojectionen beider Linien in diese Ebene überträgt (§. 27.). Es seien z. B. a'c', a'b'' und c'd', c'd'', Fig. 29a., die Projectionen der beiden Linien; a'c' die Basis, mithin a'b'' die eine

Linie selbst. Man denke sich beide Linien im Raume fest mit einander verbunden, so daß sie bei einer Bewegung ihre Lage gegen einander nicht ändern können. Man drehe a′b″ in die vertikale Lage a′b″ und bestimme nun die Projectionen der andern mitbewegten Linie. Zu dem Ende mache man den Bogen b″c″ = b″c′, so ist c″ die Stelle von c′ der Linie cd nach der Drehung und c′ die Horizontalprojection. Ein anderer Punkt d″ kommt nach d″ und seine Horizontalprojection rückt parallel mit der Basis bis d′ fort, so daß also nun c′d′, c″d″ die gesuchten Projectionen von cd nach der Drehung sind. Die Senkrechte a′e′ auf c′d′ ist nun die Horizontalprojection und wahre Länge des gesuchten Abstandes beider Linien; e″i″ senkrecht auf a′b″ ist die Vertikalprojection. Führt man den Punkt a′, i″ nach i′, i″ und e′, e″ nach e′, e″ zurück, so sind i′e′, i″e″ die Projection des gesuchten Abstandes bei der ersten Lage der Linien. Warum a′e′ die gesuchte wahre Länge ist und a′e′, i″e″ ihre Projectionen sind, sieht man mit Hülfe der vorigen Auflösung leicht ein, wenn man bedenkt, daß d′c′c″ die dort betrachtete Ebene h′gh″; a′e′, i″e″ das Perpendikel d′h′, d″h″, a′e″ die Ebene A, e′e″ die Linie no u. s. w. ist.

§. 77. Uebungsaufgaben.

1) Wie erkennt man aus den Projectionen zweier Graden, ob sie in einer und derselben Ebene liegen oder nicht? §. 49. 46. 10.

2) In einer Linie einen Punkt zu bestimmen, der einen gegebenen Abstand von einem gegebenen Punkte hat? §. 53.

3) Durch einen Punkt eine Ebene zu legen, welche mit zwei Geraden, die nicht in einer und derselben Ebene liegen, parallel ist? §. 74.

4) Durch eine Gerade eine Ebene senkrecht auf eine Ebene zu legen? §. 64.

5) Durch einen Punkt eine Linie parallel mit zwei Ebenen zu ziehen? §. 60. 61.

6) In einem Punkte einer Linie ein Perpendikel auf dieser Linie zu errichten, das zugleich mit einer der Projectionsebenen parallel ist? §. 67.

7) Es ist eine Ebene und eine dagegen geneigte Linie gegeben. Man soll durch diese eine Ebene legen, welche mit jener Ebene einen gegebenen Winkel einschließt? §. 55. 45. 62. 42.

8) Eine Gerade zu ziehen, welche zwei gegebene gerade Linien schneidet und zugleich mit einer bekannten Ebene parallel ist? §. 60. 55.

Vierter Abschnitt.

Darstellung begrenzter ebener Flächen und von Ebenen eingeschlossener Körper in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen. Durchschnitte dieser Körper mittelst Ebenen, und Entwickelung der Oberflächen.

§. 78.

Eine begrenzte Ebene wird offenbar durch die Projectionen ihrer Grenzen projicirt; denn, da jeder Theil dieser Grenze, sei er nun eine gerade oder eine krumme Linie, durch seine Projectionen völlig bestimmt ist (§. 7.), so ist es auch die ganze Grenze durch ihre Projectionen. Die Projectionen ebener, geradlinig begrenzter Flächen, z. B. die eines Quadrates, werden daher erhalten, wenn man die Projectionen seiner Eck-

punkte entsprechend mit einander verbindet. Bei der Projicirung ebener, krummlinig begrenzter Figuren müssen so viele einzelne Punkte des Umfangs projicirt werden, als zur Bestimmung der Projectionen nöthig sind. Es sollen nun von geraden und krummen Linien begrenzte Ebenen in verschiedenen Lagen näher betrachtet werden.

§. 79. Aufgabe.

Eine ebene, geradlinige Figur abcde (Fig. 29 b.), welche in der horizontalen Projectionsebene liegt, bewegt sich um eine ihrer Seiten, z. B. um ab, so lange aufwärts, bis sie mit der Horizontalebene den Winkel w einschließt. Man soll ihre Projectionen in dieser Lage bestimmen.

Man bestimme nach §. 44. die Projectionen der Eckpunkte der Figur und verbinde sie gehörig mit einander, so erhält man die Projectionen abc′d′e′, a″b″c″d″e″ der Figur abcde nach der Drehung.

Das Verfahren ist nicht anders, wenn sich die Figur nicht um eine ihrer Seiten, sondern um irgend eine andere Gerade in der Horizontalebene drehen soll. Auch verhält es sich eben so, wenn die Figur ursprünglich in der vertikalen Projectionsebene gelegen hätte; denn man kann die Zeichnung so herumdrehen, daß die beiden Projectionsebenen verwechselt werden.

§. 80. Aufgabe.

Man soll die Projectionen einer ebenen, krummlinigen Figur, z. B. des Kreises 1, 2, 3, 4, 5, (Fig. 30.) bestimmen, nachdem er sich aus seiner anfänglichen Lage in der Horizontalebene um eine beliebige Linie ab in dieser Ebene gedreht hat.

Man verfahre mit einzelnen Punkten 1, 2, 3, 4, 5, des Kreises wie in §. 79. Verbindet man sodann ihre Projectionen 1′, 2′, 3′, 4′, 5′; 1″, 2″, 3″, 4″, 5″

gehörig mit einander, so erhält man die gesuchten Projectionen. Je mehr Punkte man projicirt, desto leichter und richtiger können ihre Projectionen verbunden werden.

§. 81. Zusatz.

Da die Projectionen eines Kreises auf einem gegen seine Ebene geneigten Plane Ellipsen sind, so kommt es blos darauf an, die Projectionen der Achsen dieser Ellipsen zu bestimmen, und daraus die Ellipsen selbst zu construiren (§. 128.). Rücksichtlich der Achsen der Horizontalprojection ist offenbar 3′ 3′, d. i. die Projection desjenigen Kreisdurchmessers, dessen Projection ihm selbst gleich ist, die große Achse. Dieß ist nun offenbar der horizontale Durchmesser 3 3 des Kreises, d. i. derjenige, welcher mit der Drehungsachse parallel ist. Die kleine Achse der Horizontalprojection ist die kleinste unter den Projectionen aller Durchmesser; sie ist also die Projection desjenigen Durchmessers, der den größten Winkel mit der Horizontalebene macht oder senkrecht auf der Drehungsachse, also auch senkrecht auf demjenigen Durchmesser ist, dessen Projection die große Achse der Ellipse gibt.

Die Linie ab (Fig. 30.) ist die Horizontaltrace der Ebene des Kreises; in der Horizontalprojection ist also die Projection 3′ 3′ des mit der Trace parallelen Durchmessers 3 3 die große, und die Projection 1′ 5′ des auf der Trace senkrechten Durchmessers 1 5 die kleine Achse. Dasselbe gilt von der Vertikalprojection in Bezug auf die Vertikaltrace der Ebene des Kreises. Um nun denjenigen Durchmesser des noch in der Horizontalebene liegenden Kreises zu erhalten, welcher mit der Vertikaltrace der Ebene des Kreises nach dessen Drehung parallel ist, so wie denjenigen, welcher darauf senkrecht ist, bestimme man die Vertikaltrace bc

der Ebene des Kreises nach der Drehung (§. 38.), lege sie dann in die Horizontalebene nach bd um, ziehe durch den Mittelpunkt des in dieser Ebene befindlichen Kreises 1, 2, 3, 4, 5 einen mit jener umgelegten Trace bd parallelen Durchmesser ef, und einen darauf senkrechten gh. Sucht man nun noch die Vertikalprojectionen der Endpunkte dieser Durchmesser, wie die der Punkte 1, 2, 3 2c. im vorigen §., so hat man die beiden Achsen e''f'', g''h'' der Vertikalprojection des Kreises, und kann nun diese Projection als Ellipse construiren (§. 128.).

§. 82.

Bewegt sich mit der Figur eine Linie, welche darauf steht und einen unveränderlichen Winkel mit der Ebene der Figur macht, so findet man die Projectionen dieser Linie nach der Drehung, nach dem Verfahren §. 45.

Bildet mit der sich bewegenden Figur eine fest darauf stehende begrenzte ebene Fläche einen Winkel, so verfährt man mit den Seiten dieser Figur, wie so eben gesagt wurde.

§. 83.

Wir kommen nun zur Darstellung solcher Körper, welche von Ebenen begrenzt werden. Es ist schon §. 12. erwähnt worden, daß man diese Körper durch Projicirung ihrer Kanten darstellt. Beispiele werden die Sache klar machen.

§. 84. Aufgabe.

a'b'c'd' (Fig. 31 a.) ist die Grundfläche einer auf der Horizontalebene stehenden Pyramide; e', e'' sind die Projectionen ihrer Spitze. Man soll die Pyramide projiciren.

Man bestimme die Vertikalprojectionen a'', b'', c'', d''

der Punkte a′, b′, c′, d′ und verbinde sie durch gerade Linien mit e″, so sind diese die Vertikalprojectionen der Kanten. Die Horizontalprojection erhält man durch Verbindung des Punktes e′ mit a′, b′, c′, d′ mittelst gerader Linien.

§. 85.

Bei einer dreiseitigen körperlichen Ecke kommen drei Seitenwinkel und drei Flächenwinkel in Betracht, und es kann aus je drei dieser Stücke die körperliche Ecke bestimmt werden. Hierdurch ergeben sich folgende sechs Aufgaben. Es können nämlich gegeben oder bekannt sein: 1) Drei Seitenwinkel. 2) Zwei Seitenwinkel und der von ihnen eingeschlossene Flächenwinkel. 3) Zwei Seitenwinkel und einer der ihnen gegenüberliegenden Flächenwinkel. 4) Drei Flächenwinkel. 5) Zwei Flächenwinkel und der dazwischenliegende Seitenwinkel. 6) Zwei Flächenwinkel und einer der ihnen gegenüberliegenden Seitenwinkel. Durch folgende Betrachtung überzeugt man sich indessen, daß die drei letzten Aufgaben auf die drei ersten zurückgeführt werden können.

Errichtet man in der Spitze eines Winkels bac, (Fig. 31 b.), Senkrechte ae, ad in der Ebene des Winkels auf die Schenkel, so läßt sich leicht einsehen, daß der Winkel ead, den diese Senkrechten einschließen, die Ergänzung jenes Winkels bac zu 180° ist. Nun denke man sich ferner in der Spitze einer dreiseitigen körperlichen Ecke auf die Ebene eines jeden der drei Seitenwinkel ein Perpendikel errichtet, und eine Ebene durch je zwei derselben gelegt, so entsteht dadurch eine neue dreiseitige Ecke, welche die correspondirende Ecke jener ursprünglichen Ecke heißt. Es läßt sich nun zeigen, daß die Seitenwinkel dieser correspondirenden Ecke die Flächenwinkel der ursprünglichen zu 180° ergänzen. Ist nämlich bfca (Fig. 31 b.) eine

dreiseitige körperliche Ecke, deren Seitenwinkel bac, baf, caf sind, und ist ae senkrecht auf baf, ad senkrecht auf caf, so ist, wie man leicht einsieht, ae und ad senkrecht auf af, also auch af senkrecht auf der Ebene ead. Denkt man sich nun die drei Ebenen ead, baf, caf erweitert, so wird auf der Erweiterung von ead der Flächenwinkel zwischen baf und caf abgeschnitten und der Seitenwinkel ead stellt sich als die Ergänzung dieses Flächenwinkels zu 180° dar. Eben so sind umgekehrt die Seitenwinkel der ursprünglichen Ecke die Supplemente der Flächenwinkel der correspondirenden Ecke. Und so wie die Kanten der correspondirenden Ecke senkrecht auf den Seitenwinkeln der ursprünglichen sind, so sind umgekehrt die Kanten dieser Ecke senkrecht auf den Seitenwinkeln jener; es ist also eine Ecke die correspondirende der andern. Wir wollen nun die einzelnen Aufgaben näher betrachten.

§. 86. Aufgabe.

Aus drei Seitenwinkeln eine körperliche Ecke zu projiciren.

Die drei Seitenwinkel sind bac, cad, dae (Fig. 32 a.) in der Horizontalebene neben einander liegend. Man muß bac um ac, und dae um ad so lange aufwärts drehen, bis sie zusammen treffen. Man mache ab = ae, damit man zwei Punkte b und e weiß, welche sich vereinigen. Diese Punkte bewegen sich während jener Drehung in Kreisebenen, welche durch b und e senkrecht auf ac und ad geführt sind, und bc, de zu Halbmesser haben (§. 23.). Da diese Kreisebenen senkrecht auf der Horizontalebene sind, so schneiden sie sich in einer auf dieser Ebene senkrechten Linie, in der nothwendig der gesuchte Vereinigungspunkt von b und e liegt, und deren Horizontalprojection offenbar der Durchschnittspunkt f′ der Tracen bc, de ist. af′ ist

nun die Horizontalprojection der gesuchten Kante. Da der Vereinigungspunkt von b und e in den Kreisbogen liegt, welche von diesen Punkten beschrieben werden, so darf man, um seine Höhe über der Horizontalebene zu erhalten, nur einen dieser Bogen, z. B. den von bc beschriebenen, umlegen, und im Punkt f' eine Senkrechte f'g bis zum umgelegten Bogen auf bf' errichten, so ist sie die Höhe des gesuchten Punktes über der Horizontalebene. Die Vertikalprojectionen der Kanten ergeben sich nun leicht.

Anmerkung. Es ist leicht einzusehen, daß die Summe zweier Winkel, wie bac ꝛc. größer als der dritte sein muß, wenn eine körperliche Ecke entstehen soll, weil diese Winkel sonst ganz in den dritten fallen würden. Eben so klar ist es, daß die Summe der drei Winkel kleiner als 360° sein muß, wenn eine körperliche Ecke entstehen soll.

Werden statt der drei Seitenwinkel, drei Seitenflächen gegeben, so wird dadurch eine dreiseitige Pyramide bestimmt. Natürlich müssen die zusammenfallenden Seiten dieser Seitendreiecke gleiche Länge haben.

§. 87. Aufgabe.

Aus zwei Seitenwinkeln und dem eingeschlossenen Flächenwinkel eine körperliche Ecke zu construiren.

Sind dab, bac (Fig. 34.) die Seitenwinkel und ist ebf der von ihnen einzuschließende Flächenwinkel, so mache man db senkrecht auf ab, setze in b an df den gegebenen Flächenwinkel, mache be = db und ef senkrecht auf bf, so ist af die Horizontalprojection der dritten Kante; ef aber ist die Höhe des Punktes dieser Kante über bac, dessen Projection f ist. Der Grund dieses Verfahrens ist leicht einzusehen.

§. 88. Aufgabe.

Aus zwei Seitenwinkeln und einem der gegen-

überliegenden Flächenwinkel die körperliche Ecke zu zeichnen.

Es seien abc, cbd (Fig. 32 b.) die beiden Seitenwinkel. Man ziehe ad senkrecht auf bc und denke sich durch ad eine Vertikalebene gelegt. Dreht man nun cbd um bc in die Höhe, so beschreibt der Punkt d in jener Vertikalebene mit dem Halbmesser cd einen Kreisbogen, welcher in dhi umgelegt ist. Ist nun ce senkrecht auf ab, Winkel cef dem gegebenen Flächenwinkel gleich, auch cf senkrecht auf ce und denkt man sich das Dreieck cef um ce aufgestellt, so ist die Lage des dritten Seitenwinkels durch ab und ce in der aufgestellten Lage bestimmt. Denkt man sich nun auch den Bogen dhi aufgestellt, so vereinigt sich cg = cf mit cf, und ag ist der Durchschnitt der Ebene des dritten Seitenwinkels mit der Ebene des Kreisbogens. Der Punkt d begegnet bei seiner Bewegung der Linie ag in h und i, und zieht man die Perpendikel hk, il auf ad, so ist sowohl bk als bl die gesuchte dritte Kante. Mittelst hk und il könnte nun auch leicht die ganze Ecke auf einer beliebigen vertikalen Projectionsebene dargestellt werden.

Diese Aufgabe läßt also zwei Auflösungen zu, wenn die Linie ag den Bogen dhi schneidet, dagegen nur eine, wenn sie diesen Bogen blos berührt und gar keine, wenn keines von beiden statt findet. In diesem Falle erreicht nämlich die Fläche cbd bei ihrer Bewegung um bc die durch ab unter dem gegebenen Flächenwinkel gelegte Ebene gar nicht.

§. 89. Aufgabe.

Aus drei Flächenwinkeln eine körperliche Ecke zu construiren.

Zufolge §. 85. betrachte man die Supplemente der drei gegebenen Winkel als Seitenwinkel und zeichne daraus nach §. 86. die correspondirende

Ecke der gesuchten. Errichtet man sodann in der Spitze auf die Ebenen der Seitenwinkel nach §. 64. Perpendikel, so bilden sie die Kanten der gesuchten Ecke (§. 85.) und diese Ecke ist daher gezeichnet.

Bemerkung. Aus der Geometrie ist bekannt, daß die drei gegebenen Flächen- oder Neigungswinkel zusammen größer als 180° und kleiner als 540° sein müssen.

§. 90. Aufgabe.

Aus zwei Flächenwinkeln und dem dazwischenliegenden Seitenwinkel die körperliche Ecke zu construiren.

Nach §. 85. nehme man die Supplemente der gegebenen zwei Flächenwinkel zu Seitenwinkel, sowie das Supplement des gegebenen Seitenwinkels als dazwischenliegenden Flächenwinkel und zeichne daraus nach §. 87. die correspondirende Ecke der gesuchten. Endlich verfahre man wie am Schlusse der Auflösung des vorhergehenden §s.

Einfacher läßt sich jedoch diese Aufgabe wie folgt auflösen. iah (Fig. 33.) sei der Seitenwinkel, und cbd, fbe seien die Flächenwinkel. Durch einen beliebigen Punkt c eines Schenkels bc ziehe man cf parallel mit be, und cd, fe senkrecht auf be, führe sodann gh in der Entfernung bd mit ai, und gi in der Entfernung be mit ah parallel, so ist der Durchschnitt g dieser Parallellinien die Projection eines Punktes der gesuchten Kante und mithin ag die Projection dieser Kante selbst; cd ist die Höhe jenes Punktes über der Horizontalebene. Die Vertikalprojectionen der Kanten können in Bezug auf irgend eine Vertikalebene leicht bestimmt werden. Den Grund dieses Verfahrens sieht man leicht ein, wenn man vertikale Ebenen senkrecht auf ah und ai durch den Punkt g führt und die Winkel zu bestimmen sich vornimmt, welche auf diesen Ebenen durch die Seitenflächen iah, iag, hag im Raume abge-

schnitten werden. Man würde offenbar die Winkel cbd, fbe erhalten.

§. 91. Aufgabe.

Aus zwei Flächenwinkeln und einem der gegenüberliegenden Seitenwinkel die körperliche Ecke zu zeichnen.

Zufolge §. 85. zeichne man aus den Supplementen der zwei bekannten Flächenwinkel als Seitenwinkel, und aus dem Supplement des gegebenen Seitenwinkels als gegenüberliegendem Flächenwinkel nach §. 88. die correspondirende Ecke der gesuchten. Hierauf verfahre man noch wie am Schlusse der Auflösung §. 89.

Diese Aufgabe kann indessen auf folgende Art leichter aufgelöst werden.

Es sei bac (Fig. 32 c.) der gegebene Seitenwinkel und ac senkrecht auf der Basis bh. Man drehe bac um ac in die Höhe, bis bc nach cd kommt und hier den gegebenen anliegenden Flächenwinkel dce mit der Basis einschließt. Die in die Höhe gedrehte Kante ab durchschneidet die Vertikalebene in d, und ae, cd sind ihre Projectionen in dieser Lage. Nun lege man nach §. 62. durch diese Kante eine Ebene ahd, welche unter dem andern bekannten Flächenwinkel gegen die Horizontalebene geneigt ist. Zu dem Ende macht man dfe diesem Winkel gleich und zieht an den mit ef aus e beschriebenen Kreisbogen fg eine Tangente ah, so sind nun ac, ae und ah die drei gesuchten Kanten.

§. 92. Aufgabe.

Aus den Projectionen einer dreiseitigen körperlichen Ecke ihre drei Flächenwinkel zu bestimmen.

Es seien kahf, kgh (Fig. 34.) die Projectionen, wobei ki senkrecht auf der Kante ah ist und die Basis bildet. Obgleich die Aufgabe mit Hülfe von §. 37 und 69 aufgelöst werden kann, so läßt sich doch hier folgender kürzere Weg einschlagen. Man ziehe fb, fh

senkrecht auf ak, ah, mache fe senkrecht auf fb und gleich fg, so sind fhg und fbe die Flächenwinkel, welche die Seitenwinkel fah, fak mit dem in der Horizontalebene liegenden Seitenwinkel kah bilden. Um nun den dritten Flächenwinkel an der Kante af zu finden, drehe man die Ecke um ah und lege sie mit dem Seitenwinkel fah dadurch in die Horizontalebene, daß man das Dreieck hgk, als den Durchschnitt der Ecke mit der Vertikalebene durch ki, in die Lage hil bringt. Hierdurch kommt g nach i, k nach l und iahm ist die Projection der Ecke in dieser Lage. Wird nun mn senkrecht auf ai, mo senkrecht auf mn gezogen und mo gleich ml gemacht, so ist onm der dritte gesuchte Flächenwinkel. Die Sache wird recht deutlich, wenn man sich fbe um fb, fhg um fh, hml um hm und mno um mn aufgestellt denkt, wodurch sich e mit g, und l mit o vereinigt.

§. 93. Aufgabe.

Die Pyramide abcde (Fig. 31 a.) wird durch eine Ebene lkf″ geschnitten, die auf der Vertikalebene senkrecht ist. Man soll die Projectionen des Schnittes zeichnen, denselben nach seiner wahren Gestalt und Größe in eine der Projectionsebenen umlegen, die Pyramidenfläche sammt dem Schnitte entwickeln, und Seiten- und Flächenwinkel bestimmen.

Da die Ebene lkf″ senkrecht auf der Vertikalebene ist, so ist f″h″ die Vertikalprojection des Schnittes und die Punkte f″, g″, h″, i″ sind die Vertikalprojectionen seiner Eckpunkte, d. i. derjenigen Punkte, in denen die Ebene lkf″ von den Kanten der Pyramide geschnitten wird. Die Horizontalprojectionen dieser Punkte liegen in a′e′, b′e′ rc. und werden daher leicht durch Senkrechte von f″, g″ rc. auf die Basis in f′, g′ rc. erhalten. Hierdurch wird die Horizontalprojection f′g′h′i′ des Schnittes bestimmt.

Die wahre Gestalt und Größe des Schnittes erhält man am bequemsten durch Umlegung der Ebene lkf'' um ihre Vertikaltrace in die Vertikalebene, weil bei dieser Drehung die Senkrechten f'm, g'n, h'o, i'p unmittelbar die Größe der Halbmesser bezeichnen, mit welchen sich die Punkte f, g, h, i des Schnittes selbst um f''k drehen. Macht man daher die auf f''k Senkrechten f''f, g''g, h''h, i''i gleich jenen Senkrechten, so ist fghi der umgelegte Schnitt.

Wollte man ihn um lk umlegen, so wären h''k, i''k, g''k, f''k die Halbmesser, welche von lk aus auf die durch h', i', g', f' senkrecht auf lk gezogenen Linien getragen werden müßten.

Behufs der Entwickelung darf man nur jede Seitenfläche um ihre Horizontaltrace umlegen und die so erhaltenen Dreiecke gehörig zusammensetzen. Indessen sucht man eben so leicht die wahre Länge der Kanten, und setzt so die Dreiecke zusammen. Man trage also z. B. a'b' in ab, mache rs = a'e', so ist e''s die wahre Länge der Kante ae, denn diese Kante ist die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, wovon a'e, die eine Cathete und die andere gleich e''r ist; beschreibt man also aus a mit e''s einen Bogen und durchschneidet ihn aus b mit der wahren Länge der Kante be, so erhält man die Spitze e. Aus ihr beschreibt man mit der Kante ce einen Bogen bei c und durchschneidet ihn aus b mit b'c', so wird der Punkt c bestimmt. Auf diese Art entwickelt man die ganze Pyramidenfläche.

Um den Schnitt in diese Entwickelung zu übertragen, mache man nur af, bg 2c. gleich der wahren Länge der Kanten der abgekürzten Pyramide. Man erhält z. B. af, wenn man mt = a'f' und af = f''t macht, denn af im Raume ist die Hypotenuse eines

rechtwinkeligen Dreiecks, dessen eine Cathete gleich f''m und dessen andere a'f' ist.

Man kann auch, um den Schnitt zu entwicklen, f'q' senkrecht auf a'b' und aq = a'q' machen, so schneidet die auf ab senkrechte Linie qf in ac den Punkt f des zu entwickelnden Schnittes ab. Weil sich indessen Senkrechte wie qf mit den entwickelten Kanten oft unter sehr spitzen Winkeln schneiden und demnach keinen scharfen Durchschnitt geben, so ist jenes Verfahren diesem vorzuziehen.

Die Entwicklung gibt zugleich alle Seitenwinkel an. Die Flächenwinkel dagegen können nach §. 92. bestimmt werden, da die Ecken an der Grundfläche dreiseitige körperliche Ecken sind.

§. 94. Zusatz.

Es ist leicht einzusehen, daß man aus den Projectionen einer abgekürzten Pyramide die Projectionen der ganzen dadurch erhält, daß man die Projectionen der Kanten verlängert, bis sie sich schneiden. Dieses muß offenbar in einem und demselben Punkte geschehen, und dieser ist alsdann die Projection der Spitze in der betreffenden Projectionsebene. Es müssen also die zwei Punkte, in welchen sich die Projectionen der Kanten in jeder Projectionsebene schneiden, in einer auf der Basis senkrechten Geraden liegen (§. 18.). Die Projectionen einer abgekürzten Pyramide können daher nur diesen Forderungen entsprechend angenommen werden.

§. 95. Aufgabe.

Eine Pyramide wird durch eine beliebige Ebene geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen und entwickeln.

Man suche nach §. 55. die Projectionen der Punkte, in denen die Kanten die Ebene schneiden und verbinde sie gehörig mit einander; so erhält man die Projectio-

nen des Schnittes. Je nach der Lage der Projectionen der Kanten gegen die Tracen wird man bald die Horizontalprojection, bald die Vertikalprojection der Durchschnittspunkte zuerst suchen müssen (§. 56.).

Die Umlegung des Schnittes und die Entwicklung der Pyramidenfläche geschieht wie §. 93. 44.

§. 96.

Wenn man den §. 82. gut verstanden hat und auszuführen weiß, so ist es leicht, eckige Körper in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen darzustellen; denn die Kanten und Seitenflächen der Körper sind, in Bezug auf die feste Ebene, mit welcher sich der Körper dreht, nichts anders, als die dort betrachtete Linie, oder Fläche, welche mit der sich drehenden Ebene einen beständigen Winkel bildete und überhaupt ihre Lage gegen diese Ebene während der Drehung nicht änderte. Folgende Beispiele werden zum Verstehen dieses Gegenstandes hinreichen

§. 97. Aufgabe.

Ein auf der Horizontalebene stehender Würfel abcdefgh (Fig. 35 a.), dessen Projection auf dieser Ebene das Quadrat abcd ist, bewegt sich zuerst um eine seiner unteren Kanten, z. B. um ab, und dann aus dieser Lage auf der Spitze a so, daß sich dabei alle Kanten in Vertikalebenen bewegen. Man soll die Projectionen des Würfels für beide Lagen bestimmen.

Die Projection des Würfels auf einer durch ad gelegten Vertikalebene, ist das Quadrat adhe Fig. 35 b. Dieses Quadrat drehe man um den Winkel, um welchen sich der Würfel zuerst drehen soll, so kommt es in die schiefe Lage adhe, und es zeigen die Entfernungen ai, ak, al, bi, bk, bl an, wie weit die Projectionen der Punkte d, e, h, c, f, g Fig. 35 a. in der Richtung der Kanten ad, bc von der Linie ab entfernt

sind, und die Senkrechten di, ci, ek, fk, gl, hl Fig. 35b. zeigen die Höhe der Punkte c, d, e, f, g, h des Würfels Fig. 35a. über der Horizontalebene an. Trägt man jene Entfernungen von den entsprechenden Punkten a und b auf die Richtungen von ad und bc gehörig auf beide Seiten von ab, z. B. ai von a gegen d, ak von a gegen e′ ꝛc.; so erhält man als Horizontalprojection des Würfels das Rechteck e′d′c′f′, und wenn jene Höhen di, ci ꝛc. auf die, von a′, b′, c′ ꝛc. auf die Basis senkrecht gezogenen Linien, von dieser Linie aus, aufgetragen werden, erhält man die Punkte a″, b″, c″ ꝛc. und durch gehörige Verbindung dieser Punkte die Vertikalprojection a″b″c″d″e″f″g″h″ des Würfels nach seiner ersten Drehung.

Projicirt man nun den Würfel in eine durch ab gelegte Vertikalebene, so entsteht das Rechteck abgh Fig. 35c., dessen eine Seite ab die Seite des Würfels, und dessen andere Seite das Perpendikel gl aus Fig. 35b. ist. Die Kanten cd, fe sind mittelst ihrer Höhen ci, ek aus Fig. 35b. eingetragen. Dreht man nun dieses Rechteck so weit um a, bis der Winkel w demjenigen gleich ist, um welchen sich der Würfel bei der zweiten Bewegung drehen soll; so zeigen die Abstände bm, bn, ao, ap, bq, br, as an, um wie viel die Projectionen b′, c′, d′, e′, f′, g′, h′ der Reihe nach in der Richtung der Bewegung fortrücken. Man erhält also durch Uebertragung dieser Entfernungen die Projectionen b‵, c‵, d‵, e‵, f‵, g‵, h‵ und folglich die Horizontalprojection des Würfels. Die Perpendikel bm, cn, do, ep, fq, gr, hs zeigen wieder die Höhen der Ecken b, c, d, e, f, g, h des Würfels über der Horizontalebene nach der zweiten Drehung an. Mittelst ihrer und der Projectionen b‵, c‵, ... bestimmt man nun wieder, wie oben, die Vertikalprojectionen

b'', c'', d'' . . . . der Ecken und folglich auch die Projection des Würfels.

Da die einander gegenüberstehenden Projectionen der Kanten mit einander parallel sein müssen (§. 46.), so kann man hiernach die Arbeit prüfen.

§. 98. Aufgabe.

Eine abgekürzte Pyramide a'b'c'd'e'f, a''b''c''d''e''f'' (Fig. 36a.) steht auf der horizontalen Projectionsebene und dreht sich um die Spitze b', b'' der Grundfläche a'b'c' so, daß die Halbmesser einzelner Punkte der Grundfläche senkrecht auf der durch b' gehenden beliebigen Linie b'l sind. Die Grundfläche soll nach der Drehung mit der Horizontalebene den Winkel w machen. Man soll die Pyramide in dieser Lage projiciren.

Verfährt man mit der Grundfläche nach §. 79, so erhält man ihre Projectionen a'b'c', a''b''c''. Mit den Kanten verfahre man nach §. 82, so erhält man die Projectionen d', d'', e', e'', f, f'' ihrer oberen Eckpunkte. Diese Punkte gehörig mit einander verbunden, geben die Projectionen a'b'c'd'e'f, a''b''c''d''e''f'' der Pyramide nach der Drehung.

§. 99. Zusatz.

Soll die Pyramide (Fig. 36a.) sowohl in der gegebenen Lage, als nach der Drehung auf eine andere beliebige Vertikalebene mn projicirt werden, so projicire man jede Ecke derselben nach §. 27 auf diese Ebene, indem man von der Basis mn aus, auf die, von den Horizontalprojectionen der Eckpunkte gefällten Perpendikel, die Höhen derselben über der Horizontalebene, d. i. die Abstände ihrer Vertikalprojectionen von der Basis a''c'', trägt. Durch gehörige Verbindung dieser Projectionen erhält man dann die Projectionen a'''b'''c''' . . . ., a'''b'''c''' . . . . der Pyra-

mide auf dieser neuen Vertikalebene. Man muß wohl Achtung geben, daß man die nicht sichtbaren Kanten punktirt.

§. 100. Aufgabe.

Die Grundfläche abcd (Fig. 36 b.) und zwei Seitenflächen abfe, bchg einer abgekürzten Pyramide sind gegeben. Man soll die ganze Pyramide zeichnen und ihre Oberfläche entwicklen oder ihr Netz construiren.

Man verlängere ae und bf bis sie sich in i, deßgleichen bg und ch, bis sie sich in k schneiden, so ergeben sich die umgelegten Seitenflächen abi, bck der ganzen Pyramide und Perpendikel von i und k auf ab und bc bestimmen durch ihren Durchschnitt l die Projection der Spitze. la, lb, lc, ld sind nun die Projectionen der vier Kanten und es werden darin leicht die Punkte m, n, o der oberen Fläche durch Senkrechte von den Punkten e, f, g, h auf ab und bc bestimmt. Nun läßt sich leicht die Projection der Pyramide auf einer beliebigen Vertikalebene zeichnen. Ist dieß geschehen, so legt man durch die drei bekannten oberen Ecken der abgekürzten Pyramide eine Ebene und sucht ihren Durchschnitt mit der vierten Seitenkante, deren Horizontalprojection ld ist. Hierdurch wird die obere Fläche vollends bestimmt und der übrige Theil des Netzes kann nun nach dem Vorhergehenden leicht gezeichnet werden.

§. 101. Uebungsaufgaben.

Diese wenigen Beispiele sind hinreichend, um einzusehen, auf welche Art man eckige von Ebenen begrenzte Körper überhaupt, und in verschiedenen Lagen gegen die Projectionsebenen, nebst ihren Schnitten mit Ebenen darstellt. Hat man die vorhergehenden Abschnitte gründlich aufgefaßt, so wird man sich bei der

Projicirung erwähnter Körper in vorkommenden Fällen leicht zu helfen wissen. Zur Uebung können indessen folgende Aufgaben dienen:

1) Ein Rechteck dreht sich aus seiner horizontalen Lage erst um die eine Seite um einen gegebenen Winkel und dann auf gleiche Weise um die andere Seite. Man soll es nach jeder Drehung projiciren.

2) Schiefe Prismen oder Pyramiden werden von der Vertikalebene geschnitten. Man bestimme die Durchschnitte und entwickle die Oberflächen.

3) Aus den drei Seitenwinkeln einer Ecke eines schiefen Parallelepipedums und der Länge der drei Kanten dasselbe sammt Netz zu zeichnen, mittelst einer Ebene zu durchschneiden, den Schnitt zu projiciren und in die Entwicklung überzutragen.

4) Ein Dodekaeder aus seiner Seite zu zeichnen, mit einer beliebigen Ebene zu durchschneiden, den Schnitt zu projiciren und umzulegen.

5) Den Durchschnitt zweier schiefen Prismen oder Pyramiden darzustellen, deren Grundflächen ganz oder zum Theil zusammenfallen.

6) Zeichne Grund- und Aufriß eines viereckigen Thurms mit achteckiger Spitze, d. h. ein grades Prisma mit quadratförmiger Grundfläche und darauf eine achtseitige reguläre Pyramide; die Seitenwände des Thurms sollen in Giebel von gegebener Höhe auslaufen, und vier Ecken der Pyramidengrundfläche mit den Ecken des Prisma zusammenfallen. Es können auch durch die oberen Kanten des Prisma's Ebenen unter bekannter Neigung bis zum Schnitt mit der Pyramidenfläche gelegt werden.

7) An einer geradlinigen Böschung eine Rampe oder Auffahrt anzulegen.

8) In dem ausspringenden Winkel einer Verschanzung eine Geschützbank zu zeichnen.

Fünfter Abschnitt.

Von den krummen Linien und den Tangenten.

§. 102.

Man nennt die krummen Linien auch mit einem Worte Curven. Sie zerfallen zunächst in einfach und doppelt gekrümmte. Liegen alle Punkte einer Curve in einer und derselben Ebene, wie z. B. bei dem Kreise, so ist sie von einfacher Krümmung oder eine ebene Curve. Ist dieses aber nicht der Fall, so ist die Curve eine doppelt gekrümmte. Rollt man z. B. ein Papier, auf das ein Kreis gezeichnet ist, zusammen, so erhält man eine doppelt gekrümmte Curve. Die ebene Curve kann man sich durch die Bewegung eines Punktes in einer Ebene entstanden denken; bleibt aber der Punkt während seiner Bewegung nicht stets in einer und derselben Ebene, so beschreibt oder erzeugt er eine doppelt gekrümmte Curve, wenn er anders eine Curve erzeugt.

Eine ebene Curve kann man im Allgemeinen auch als den Durchschnitt einer krummen Fläche und einer Ebene, und eine doppelt gekrümmte Curve als den Durchschnitt zweier krummen Flächen betrachten, obgleich diese Durchschnitte nicht immer solche Curven sind.

§. 103.

Es ist schon im §. 6. 7. gesagt worden, wie die Projectionen einer Curve bestimmt werden, und daß durch sie die Curve selbst völlig bestimmt ist. Die

Projectionen werden offenbar desto richtiger, je mehr Punkte der Curve man projicirt. Es ist klar, daß die eine Projection einer ebenen Curve eine gerade Linie ist, wenn die Ebene der Curve selbst projicirende Ebene wird. Wenn daher eine ebene Curve mit einer Projectionsebene parallel ist, so ist ihre Projection auf der andern eine gerade, mit der Basis parallele Linie, und die Projection auf der ersten Projectionsebene drückt zugleich die wahre Gestalt und Größe der Curve im Raume aus. Die Projectionen einer doppelt gekrümmten Curve können aber nie gerade Linien werden, in welcher Lage sich auch die Curve im Raume befinden mag, weil die Curve sonst in einer Ebene liegen müßte.

So lange man sich daher mit ebenen Curven an und für sich, und in keiner Verbindung mit Größen beschäftigt, die in andern Ebenen liegen, kann man die durch die Curven bestimmten Ebenen zu Projectionsebenen, folglich die Curven selbst als ihre Projectionen darauf annehmen; die andern Projectionen liegen dann in der Basis (§. 20. Nr. 4.). Sobald man aber die ebenen Curven in Beziehung mit andern Größen betrachtet, die nicht mit ihnen in einer und derselben Ebene liegen, bedarf man dazu beider Projectionsebenen. Dieß ist bei Curven von doppelter Krümmung stets der Fall.

Es sollen nun einige Aufgaben über die Curven im Allgemeinen vorgenommen werden.

§. 104. Aufgabe.

Die Durchschnitte einer Curve abc (a'b'c', a''b''c'') (Fig. 37.) mit den Projectionsebenen zu bestimmen.

Da die Vertikalprojectionen der Durchschnitte mit der Horizontalebene in der Basis liegen, so müssen es die Punkte a'', c'' sein, in denen die Vertikalprojection

a''b''c'' die Basis schneidet. Errichtet man also hier Senkrechte in der Horizontalebene auf die Basis, so sind ihre Durchschnitte a', c' mit der Horizontalprojection a'b'c' die gesuchten Durchschnitte mit der Horizontalebene. Eben so liegen die Durchschnitte der Curve mit der Vertikalebene in den Punkten d'', e'', in welchen die Vertikalprojection von den Senkrechten geschnitten wird, die in den Durchschnitten d', e' der Horizontalprojection mit der Basis auf diese errichtet werden.

Man sieht leicht ein, daß sich derjenige Theil der krummen Linie im Raume, dessen Projectionen d'b'e', d''b''e'' sind, hinter der vertikalen Projectionsebene, und die Theile ak, cg derselben unterhalb der Horizontalebene befinden. Die Durchschnitte der Curve mit den Projectionsebenen dienen also auch dazu, die sichtbaren Theile von den unsichtbaren oder den durch die Projectionsebenen gedeckten Theilen zu trennen.

§. 105. Zusatz.

Da man krumme Linien nicht verlängern kann wie gerade, so kann man auch nicht die Durchschnitte derselben mit andern Linien, oder mit Flächen bestimmen, wenn sie nicht wirklich vorhanden sind, d. h. man kann nicht sagen, wo eine Curve eine andere, oder eine Fläche schneidet, wenn man nicht im Stande ist, die Curve im Raume bis zum fraglichen Durchschnitt, und dann auch ihre Projectionen zu verlängern. Die Projectionen krummer Linien richten sich nämlich selten nach dem Gesetze, nach welchem die zugehörigen Curven entstanden sind, sondern sie hängen nicht weniger von der jedesmaligen Lage der Curve gegen die Projectionsebenen, als von ihrer Gestalt selbst ab.

§. 106. Aufgabe.

Eine Ebene ist durch ihre Tracen, und eine in die-

ser Ebene liegende Curve durch eine ihrer Projectionen, z. B. ihre Horizontalprojection, gegeben. Man soll die andere Projection dieser Curve bestimmen.

Man nehme in der gegebenen Projection eine Reihe von Punkten an und suche die zugehörigen Vertikalprojectionen nach §. 53. oder §. 58., so ist die dadurch bestimmte Curve die gesuchte Vertikalprojection.

§. 107. Aufgabe.

Den Durchschnitt der Curve a′b′, a″b″ (Fig. 38.) mit der Ebene cde zu bestimmen.

Diejenige projicirende Fläche der Curve, deren Durchschnitt mit der Horizontalebene die Horizontalprojection der Curve ist, §. 8., schneidet die Ebene cde in einer krummen Linie, deren Horizontalprojection f′g′ ist, und welche nothwendig den gesuchten Durchschnitt enthält. Man suche nun die Vertikalprojection f″g″ dieser krummen Linie nach dem vorigen §., so ist ihr Durchschnitt h″ mit der Vertikalprojection a″b″ der Curve die Vertikalprojection des gesuchten Durchschnitts. Die Horizontalprojection h′ ergibt sich nun leicht in f′b′.

§. 108. Aufgabe.

Die Projectionen eines Kreisbogens nebst den Tracen einer Ebene sind gegeben. Man soll die Durchschnittspunkte des ganzen Kreises mit der Ebene bestimmen.

Durch Annahme dreier Punkte des Bogens suche man die Ebene desselben und bestimme dann deren Durchschnitt mit der gegebenen Ebene (§. 40. 61.). Die Durchschnittspunkte der Projectionen des Kreisbogen mit den Projectionen jenes Durchschnitts der Ebenen sind die gesuchten Punkte. Finden diese Durchschnittspunkte nicht Statt, so zeigt dieß, daß der gegebene Bogen die gegebene Ebene nicht schneidet. Als-

dann muß man die Ebene des Bogens mit dem Bogen in eine Projectionsebene umlegen (§. 42.), den ganzen Kreis beschreiben, die Ebene in ihre erste Lage zurück drehen und hierauf die Projectionen des Kreises bestimmen (§. 80. 81.). Auf diese Art erhält man auch den Halbmesser des Kreises.

Dieser Halbmesser wird auch erhalten, wenn man in der Mitte zweier Sehnen des Kreisbogens nach §. 67. Senkrechte auf diese Sehnen in der Ebene des Bogens errichtet, und von ihrem Durchschnitte nach einem beliebigen Punkt des Bogens eine Gerade zieht.

§. 109. Aufgabe.

Aus den Projectionen einer Curve zu untersuchen, ob die Curve einfach, oder doppelt gekrümmt ist.

Man nehme in der Curve drei beliebige Punkte an, die nicht in einer geraden Linie liegen, und lege durch sie eine Ebene (§. 40.). Hierauf untersuche man, ob die andern Punkte der Curve in dieser Ebene liegen oder nicht (§. 53. 54.). Sobald man einen Punkt findet, der nicht darin liegt, sieht man, daß die Curve von doppelter Krümmung ist.

§. 110. Aufgabe.

Die wahre Gestalt einer ebenen Curve aus ihren Projectionen zu erkennen.

Nachdem man die Ebene der Curve bestimmt hat (§. 40.), lege man diese Ebene mit allen Punkten der Curve in eine Projectionsebene um (§. 42.). Die gehörige Verbindung dieser umgelegten Punkte gibt das Gesuchte.

§. 111. Zusatz.

Da durch eine ebene Curve eine Ebene bestimmt wird, so können nur die Projectionen dreier Punkte einer solchen Curve willkührlich angenommen werden, und die Projectionen aller übrigen Punkte sind als-

dann so zu bestimmen, daß diese Punkte in der Ebene jener drei Punkte liegen. Man kann also nur die Horizontal- oder Vertikalprojectionen der andern Punkte annehmen, und muß dann die andern Projectionen in der durch jene drei Punkte bestimmte Ebene suchen (§. 53. oder §. 58.).

Von den Tangenten an krummen Linien.

§. 112.

Zur näheren Bestimmung der Lage einer Curve gegen eine andere, oder gegen eine Ebene, gehört die Kenntniß des Winkels, den sie mit dieser Curve oder Ebene einschließt und dieser Gegenstand führt unmittelbar auf die Betrachtung der Tangenten.

Einen unendlich kleinen Theil einer krummen Linie kann man als gerad betrachten und sich demnach vorstellen, die Curve bestehe aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien. Ein solches Theilchen heißt ein Element der Curve. Es gehört offenbar auch einer geraden Linie an, welche entsteht, wenn man sich das Element verlängert denkt. Eine solche Gerade nennt man eine Tangente an der Curve, und das beiden gemeinschaftliche Element ihren Berührungspunkt.

Auch auf folgende Art kann man sich eine Vorstellung von einer Tangente an einer Curve machen. Man denke sich, die Curve werde von einer Geraden in zwei Punkten a und b geschnitten, deren einer, z. B. a, fest ist. Dreht man nun die Gerade um diesen Punkt so, daß der Punkt b in der Curve gegen den Punkt a rückt, so fällt er endlich mit diesem zusammen und die Gerade hat dann nur den Punkt a mit der Curve gemein. In der Lage, in welche sie im Augenblicke der Vereinigung beider Punkte a und b kommt, heißt sie Tangente an der Curve im Punkte a.

Eine Curve berührt eine andere, wenn sie ein Element mit ihr gemein hat, und dann ist die Verlängerung dieses Elementes Tangente an beiden Curven. Zwei sich berührende Curven haben daher am Berührungspunkte eine gemeinschaftliche Tangente.

§. 113.

Die Projectionen eines Elementes einer Curve sind, als Projection einer unendlich kleinen Geraden, auch unendlich kleine gerade Linien und machen Theile der Projectionen der Curve aus; sie werden, verlängert, zu Tangenten an diesen Projectionen und sind so nichts anders, als die Projectionen der Tangente im Raume. Die Projectionen von Tangenten an Curven sind also Tangenten an den Projectionen der Curven. Man erhält daher die Projectionen einer Tangente an einer Curve in einem gegebenen Punkte, wenn man in den Projectionen dieses Punktes Tangenten an die Projectionen der Curve zieht.

§. 114.

Die Lage der Tangente an einer Curve ist durch den Berührungspunkt bestimmt; aber die Lage einer Curve, welche eine andere berührt, ist es durch den Berührungspunkt allein noch nicht, wie man leicht einsieht, wenn man sich die eine Curve um die gemeinschaftliche Tangente gedreht denkt. Sie behält dabei stets dasselbe Element mit der andern Curve in allen Lagen bei, mithin berühren sich auch beide Curven in allen diesen Lagen. Diejenige dieser Lagen, welche man sich insbesondere bei der Berührung zweier Curven denkt, soll später (§. 116.) näher betrachtet werden.

§. 115.

Unter dem Winkel, den zwei sich schneidende Curven

mit einander einschließen, versteht man den Winkel, welchen die Tangenten in dem Durchschnittspunkte an beiden Curven mit einander bilden. Eben so versteht man unter dem Winkel, den eine Curve mit einer Linie oder einer Ebene macht, den Winkel, unter welchem die Tangente an der Curve im Durchschnittspunkte derselben gegen die Linie oder Ebene geneigt ist. Kann man also in gegebenen Punkten der Curven Tangenten an diese ziehen und ihre Projectionen angeben, so kann man auch den erwähnten Winkel nach §. 49. und 68. bestimmen.

§. 11.

Eine Ebene, welche eine Tangente in ihrem Berührungspunkte mit einer Curve senkrecht schneidet, heißt Normalebene der Curve. Jeder andern Tangente entspricht daher eine andere Normalebene. Bei einer ebenen Curve heißt die gerade Linie, welche in der Ebene der Curve liegt und im Berührungspunkte einer Tangente senkrecht auf dieser ist, Normallinie oder Normale der Curve in dem Berührungspunkte; sie ist also der Durchschnitt der Ebene der Curve mit der Normalebene. Hiernach ist z. B. der Halbmesser eines Kreises die Normale der Peripherie in dem Punkte, den er mit ihr gemein hat.

Bei doppelt gekrümmten Curven muß die Normale noch näher bestimmt werden, denn ihre senkrechte Lage auf der Tangente reicht hier eben so wenig, als bei ebenen Curven, zu ihrer vollständigen Bestimmung hin. Man denke sich eine Ebene durch die Tangente in einem Punkte a einer Curve von doppelter Krümmung gelegt, welche diese Curve noch in einem Punkte b schneidet. Dieser Punkt rücke nun, bei einer entsprechenden Drehung der Ebene um die Tangente, gegen a, so

wird diese Ebene bei jeder Lage des Punktes b bestimmt sein, also auch in dem Moment der Vereinigung der beiden Punkte a und b. In dieser Lage heißt sie Tangentialebene, und ihr Durchschnitt mit der Normalebene, d. h. die auf der Tangente im Berührungspunkte senkrechte und in der Tangentialebene liegende Gerade, ist die Normallinie der doppelt gekrümmten Curve im betreffenden Berührungspunkt.

Unter der oben §. 114. erwähnten Lage zweier sich berührenden Curven versteht man diejenige, bei welcher sie eine gemeinschaftliche Tangentialebene haben; ihre Normalen fallen dann zusammen, statt daß sie bei jeder andern Lage einen Winkel mit einander bilden.

§. 117.

Aus dem vorigen §. ergibt sich, daß die Normalebenen der Curven leicht bestimmt werden können, sobald man Tangenten an die Curven, oder an ihre Projectionen zu ziehen weiß. Bei der ebenen Curve darf man nämlich nur die Tangente im Berührungspunkte mittelst einer Ebene senkrecht durchschneiden (§. 66.); so ist diese die gesuchte Normalebene, und die Normallinie ergibt sich dann auch leicht auf folgende Art.

Es seien z. B. a′b′c′, a″b″c″ (Fig. 39.) die Projectionen einer ebenen Curve; a′d′, a″d″ die Projectionen einer Tangente im Punkte a daran, so ist die Gerade d′e′, welche durch den Durchschnitt d′ dieser Tangente und den Durchschnitt e′ einer andern Geraden a′c′, a″c″ in der Ebene der Curve mit der Horizontalebene bestimmt wird, die Horizontaltrace der Ebene der Curve; in dieser Ebene liegt die gesuchte Normale und ist im Punkt a auf der Tangente senkrecht. Legen wir nun den Punkt a wie gewöhnlich

um d'e' nach f um, so ist d'f die umgelegte Tangente und die darauf Senkrechte fg' die umgelegte Normale, welche die Horizontalebene in g' schneidet; g', g'' sind demnach die Projectionen eines zweiten Punktes der Normale, mithin sind g'a', g''a'' die gesuchten Projectionen dieser Linie.

Bei einer doppelt gekrümmten Curve kommt es zuerst auf die Bestimmung der Tangentialebene an. Es sei b'ac' (Fig. 40.) die Projection einer solchen Curve auf der durch den Punkt a gehenden Normalebene; a ist also die Projection der Tangente im Punkte a der Curve im Raume (§. 116.). Eine durch die Tangente gelegte Ebene schneide die Curve im Punkt b, dessen Projection b' ist; ab' ist dann die Projection dieser ganzen Ebene auf der Normalebene. Dreht sich nun die Ebene um die Tangente so lange, bis sich der Punkt b mit dem Punkte a vereinigt, so vereinigt sich auch b' mit a und die Gerade ab' kommt in die Lage ad oder ist Tangente an b'ac' (§. 112.) und die Ebene ist nun Tangentialebene geworden (§. 116.). Diese Ebene ist demnach bei einer doppelt gekrümmten Curve durch die Tangente im Raume, und die Tangente im nämlichen Punkt an der Projection der Curve auf der Normalebene bestimmt. Nun wird die Normale gefunden, indem man den Durchschnitt der Tangentialebene und der Normalebene construirt (§. 61.).

Auf welche Art man aber die Curve auf die Normalebene projicirt, werden wir später sehen (§. 212.).

§. 118.

Wenn eine Tangente an eine Curve gezogen werden soll, so sind drei Fälle zu unterscheiden. Entweder ist 1) der Berührungspunkt, oder 2) ein außerhalb der Curve liegender Punkt der Tangente gegeben,

oder die Tangente soll 3) mit einer gegebenen Linie parallel sein. In Bezug auf ebene Curven sollen nun diese Fälle näher untersucht werden; was dagegen die doppelt gekrümmten Curven betrifft, so werden wir später (§. 207.) erst Gelegenheit haben, sie in dieser Beziehung näher zu betrachten.

§. 119.

Im ersten Falle, wenn nämlich der Berührungspunkt gegeben ist, ergibt sich aus der Natur der ebenen Curve, wie eine Tangente an sie gezogen wird. Weiß man die Normalen einer solchen Curve zu ziehen, so folgt auch die Lage der Tangente daraus. In Bezug auf den zweiten Fall ist es klar, daß ein außerhalb der Curve liegender Punkt einer Tangente nur in der Ebene der Curve liegen kann, weil alle Tangenten an der Curve, als Verlängerungen ihrer Elemente, offenbar in der Ebene der Curve liegen. Hinsichtlich des dritten Falles sieht man leicht ein, daß die Gerade, mit welcher eine parallele Tangente gezogen werden soll, entweder selbst in der Ebene der Curve liegen, oder mit dieser Ebene parallel sein muß. Von jenem außerhalb der Curve liegenden Punkte, und von dieser außerhalb dieser Ebene liegenden Geraden, kann daher nur die eine Projection willkührlich sein und die andere muß jener Forderung entsprechend bestimmt werden. Man kann indessen, wie wir sehen werden, diese zweite Projection zur Bestimmung der Projectionen der Tangenten entbehren.

§. 120.

Mit Berücksichtigung dessen, was im vorigen §. gesagt wurde, kommt es nun bei dem zweiten Falle, wenn nämlich durch einen außerhalb der Curve liegenden Punkt eine Tangente an die Curve gezogen wer-

den soll, darauf an, den Berührungspunkt zu finden. Zu dem Ende schlägt man ein allgemeines Verfahren ein, das wir jetzt näher kennen lernen wollen, und welches in der darstellenden Geometrie und ihren Anwendungen, wenn gleich nicht immer in derselben Absicht, häufig benutzt wird.

Es sei a'b' (Fig. 41.) irgend eine in der Horizontalebene liegende Curve, deren Normalen man zu ziehen weiß, und an welche vom Punkt c' eine Tangente gezogen werden soll. Man ziehe in der Gegend des unbekannten Berührungspunktes an mehrere Punkte d', d'', d''', . . . die Normalen d'e', d''e'', d'''e''' . . . und auf sie von c' die Senkrechten c'e', c'e'', c'e'''... so entsteht durch die Verbindung der Durchschnittspunkte e', e'', e''' ... eine Curve e'e^{IV}, in welcher diejenigen Punkte liegen, in denen alle mögliche Normalen der Curve von den Linien geschnitten werden, die man von c' senkrecht darauf ziehen kann. In dieser Curve liegt daher auch der gesuchte Berührungspunkt. Da er nun auch in der Curve a'b' liegt, so ist er der Durchschnitt m' beider und die Gerade c'm' ist die gesuchte Tangente. Es ist begreiflich, daß dieses Verfahren auch bei einer im Raume befindlichen ebenen Curve in der Ebene der Curve vorgenommen werden kann, sei es nun durch Umlegung der Curve in eine Projectionsebene, oder mit Hülfe der Projectionen.

§. 121. Zusatz.

Man nennt die Linie, oder die Fläche, in welcher sich ein gewisser Punkt befinden muß, den geometrischen Ort dieses Punktes. So ist z. B. auf einer Ebene die Peripherie eines Kreises der geometrische Ort eines Punktes, der von einem andern Punkte, nämlich von dem Mittelpunkte, einen gewissen Abstand

hat. Der Durchschnitt zweier Flächen ist der geometrische Ort eines Punktes, der in beiden Flächen zugleich liegen soll ꝛc. Auf dieselbe Weise ist im vorigen §. die Curve $e'e^{IV}$ der geometrische Ort aller Punkte, in denen die Normalen der Curve a'b' von Linien geschnitten werden, die von c' senkrecht auf sie gezogen werden. Eine solche Curve heißt **Hülfscurve**. Man muß darauf sehen, daß die Punkte derselben einander nahe genug liegen, damit man sie sicher verbinden kann. Es gehört überhaupt eine gewisse Fertigkeit dazu, Curven, die durch gewisse Punkte gehen sollen, gut zu ziehen.

§. 122.

Im dritten Falle, wenn nämlich die Tangente mit einer gegebenen Linie parallel sein soll, kommt es wieder darauf an, den Berührungspunkt zu finden. Zu dem Ende zieht man an mehrere Punkte a', a'', a''' ... (Fig. 42.) der ebenen Curve b'c' Tangenten a'd', a''d'', a'''d''' ꝛc. (§. 119.) von beliebiger, aber gleicher Länge, und durch d', d'', d''' ... eben so große Parallellinien d'e', d''e'', d'''e''' . . . mit der gegebenen Linie f'g', so entsteht durch die Verbindung der Punkte e', e'', e''' ... eine Curve $e'e^{IV}$, deren Durchschnitt h' mit b'c' der gesuchte Berührungspunkt ist. Eine Parallele h'i' durch ihn mit f'g' ist nun die verlangte Tangente. Es darf nämlich diese keinen Winkel mit f'g' oder einer mit ihr parallelen Linie bilden; unter allen Tangenten, welche an die Curve gezogen werden können, ist daher diejenige die gesuchte, bei welcher der Winkel d', d'', d''' ... Null wird. Dieß ist, wie man leicht einsieht, im Punkt h' der Fall. Auch dieses Verfahren kann, gleich dem in §. 120., an einer im Raume gegebenen ebenen Curve vorgenommen werden.

§. 123. Aufgabe.

An eine ebene Curve a'b', a''b'' (Fig. 41.) durch einen außerhalb derselben liegenden Punkt, dessen Horizontalprojection c' ist, eine Tangente zu ziehen.

Man suche nach §. 119. die Horizontalprojection m' des Berührungspunktes m, ziehe c'm' und suche die Vertikalprojection m''. Zieht man durch m'' an a''b'' eine Tangente m''c'', so ist sie die Vertikalprojection der im Raume an die Curve zu ziehenden Tangente. c'm' ist die Horizontalprojection derselben, und c'', durch c' in m''c'' bestimmt, ist die Vertikalprojection des durch seine Horizontalprojection c' gegebenen Punktes. Weiß man an die Projection a''b'' keine Tangente unmittelbar zu ziehen, so muß die Vertikalprojection c'' des durch seine Horizontalprojection c' gegebenen Punktes c in der Ebene der Curve bestimmt werden (§. 40. 53. 58.). Ist dieses geschehen, so zieht man nur durch c'' und m'' eine gerade Linie.

§. 124. Aufgabe.

An eine ebene Curve b'c', b''c'' (Fig. 42.) eine Tangente parallel mit einer Linie zu ziehen, deren Horizontalprojection f'g' ist, und welche, zufolge des §. 119., entweder in der Ebene der Curve liegt, oder doch mit dieser Ebene parallel ist.

Durch Anwendung des in §. 122. auseinander gesetzten Verfahrens im Raume, ergibt sich die Horizontalprojection h' des Berührungspunktes und folglich auch dessen Vertikalprojektion h''. Zieht man nun durch h' eine Parallellinie h'i' mit f'g', so ist sie die gesuchte Horizontalprojektion der zu ziehenden Tangente. Zur Bestimmung der Vertikalprojection derselben, suche man, wie im vorigen §., die Vertikalprojektion i'', eines Punktes der Ebene der Curve, dessen Horizon-

talprojection i' ein Punkt der Horizontalprojection der Tangente ist, und ziehe durch h'' und i'' eine Gerade, so ist diese die gesuchte Vertikalprojection der Tangente, wie man leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß die Tangente selbst in der Ebene der Curve liegt. §. 119. Ist die Vertikalprojection b''c'' der Curve im Raume von der Art, daß man in gegebenen Punkten Tangenten daran zu ziehen weiß, so kann die gesuchte Vertikalprojection h''i'' auch unmittelbar tangirend an b''c'' durch h'' gezogen werden.

§. 125. Aufgabe.

Durch einen im Raume gegebenen Punkt eine Normalebene auf eine ebene Curve zu legen.

Man ziehe in mehreren Punkten der Curve Tangenten an die Curve, führe auf diese Tangenten durch den gegebenen Punkt senkrechte Ebenen (§. 66.) und suche deren Durchschnitte mit den Tangenten (§. 55.), so werden diese Durchschnitte eine in der Ebene der Curve liegende Hülfscurve bestimmen, in welcher der gesuchte Punkt liegt. Da er aber auch in der Curve liegt, so ist er der Durchschnittspunkt beider. Durch ihn ziehe man eine Tangente an die Curve, und führe auf sie durch den gegebenen Punkt eine senkrechte Ebene, so ist diese die gesuchte Normalebene. Dieses Verfahren ist dem in §. 120. angegebenen ähnlich.

Von den bekanntesten krummen Linien.

§. 126.

Wir wollen nun noch kurz diejenigen Curven näher kennen lernen, welche in den Künsten und in dem Maschinenwesen am häufigsten ihre Anwendung finden. Uebrigens schließen der Zweck und die Grenzen dieses Werkchens bei dieser Betrachtung alles aus, was in den

Bereich der analytischen Geometrie gehört; auch begnügen wir uns, diese Curven blos in einer Ebene, nämlich in der horizontalen Projectionsebene zu betrachten, wenn es ihre Natur nicht fordert, deren mehr anzunehmen.

Von den ebenen Curven sollen demnach näher betrachtet werden: 1) die Kegelschnitte, d. i. diejenigen krummen Linien, welche auf der Oberfläche eines Kegels entstehen, wenn er nach verschiedenen Richtungen mittelst einer Ebene geschnitten wird. 2) Die Evolvente oder Abwickelungslinie, 3) die Cykloiden, d. i. diejenigen Linien, welche von einem Punkte eines Kreises erzeugt werden, der sich, in einer und derselben Ebene bleibend, auf einer Geraden, oder auf der Peripherie eines andern Kreises in dessen Ebene fortwälzt. Von den doppelt gekrümmten Curven soll blos die Schraubenlinie näher erwähnt werden.

Kegelschnitte.

A. Ellipse.

§. 127.

Eine krumme in sich selbst zurückkehrende Linie abcd (Fig. 43.), bei welcher die Summe der Entfernungen ef, eg eines jeden ihrer Punkte, z. B. des Punktes e, von zwei andern festen Punkten f, g stets dieselbe ist, wo auch der Punkt e angenommen wird, ist eine Ellipse. Die festen Punkte f, g heißen Brennpunkte; die Gerade ac durch sie, große Achse, und die auf dieser in der Mitte Senkrechte db, kleine Achse der Ellipse; fl oder gl heißt die Excentricität. Die Mitte l der großen Achse heißt Mittelpunkt und eine Gerade wie mn durch denselben Durchmesser. Die Ellipse entsteht auf der Oberfläche eines Kegels, wenn diese Oberfläche durch eine Ebene so geschnitten wird, daß der Schnitt die Grundfläche weder trifft, noch mit ihr parallel ist.

§. 128. Construction.

Aus dieser Erklärung einer Ellipse ergibt sich leicht folgende Construction derselben, wenn die zwei Achsen gegeben sind. Man ziehe beide Achsen so, daß sie sich rechtwinkelig halbiren, und durchschneide die große Achse mit ihrer Hälfte aus einem Ende der kleinen, so erhält man die Brennpunkte f und g. Mit einem beliebigen Theile ch der großen Achse beschreibe man aus g oder f Kreisbogen, und durchschneide sie mit dem andern Theile ha aus dem andern Brennpunkte, so erhält man zwei Punkte wie e der Ellipse. Auf dieselbe Art sucht man deren noch mehr und verbindet sie gehörig mit einander.

Auf eine mechanische Weise wird die Ellipse erhalten, wenn man die Enden eines der großen Achse gleichen Fadens feg in den Brennpunkten befestigt, ihn mittelst eines Stiftes anspannt und den Stift fortbewegt. Dieser Stift beschreibt die Ellipse, wie man sich leicht überzeugt. Aus §. 210. Nr. 2. ergibt sich noch eine andere Art, eine Ellipse zu zeichnen.

§. 129. Aufgabe.

Die Achsen einer Ellipse zu ziehen.

Man ziehe zwei parallele Sehnen und durch ihre Mitten eine Gerade, so ist diese, wie in der analytischen Geometrie gezeigt wird, ein Durchmesser und ihre Mitte der Mittelpunkt. Aus diesem Punkte durchschneidet man nun mit beliebigem Halbmesser die Ellipse in zwei Punkten, wie e und n, Fig. 43., und zieht durch l und die Mitte von en eine Gerade, so ist sie die große Achse. Die kleine Achse ist in l senkrecht darauf.

§. 130. Aufgabe.

In einem Punkte e (Fig. 43.) eine Tangente an eine Ellipse zu ziehen.

Man ziehe die Geraden ef, eg nach den Brennpunkten, verlängere eine derselben, z. B. ef gegen i, und halbire den Winkel ieg durch ek, so ist diese Linie die verlangte Tangente.

Um sich von der Richtigkeit dieses Verfahrens zu überzeugen, mache man ei = eg, und ziehe nach irgend einem Punkte k der Tangente die Geraden ik, gk. Nun ist

$$fi = ef + eg < fk + ik$$
$$gk = ik$$
$$\text{mithin } ef + eg < fk + gk$$

also die Summe der Entfernungen des Punktes k von f und g größer, als die eines Punktes der Ellipse, mithin ist k kein Punkt der Ellipse. Auf dieselbe Art überzeugt man sich, daß außer e jeder Punkt von ek außerhalb der Ellipse liegt, daß also ek nur den Punkt e mit der Ellipse gemein hat.

§. 131. Aufgabe.

Von einem außerhalb einer Ellipse liegenden Punkte und parallel mit einer Geraden eine Tangente an die Ellipse zu ziehen.

Ist k (Fig. 43.) der gegebene Punkt, so beschreibe man mit seiner Entfernung kg von einem Brennpunkte, z. B. von g, den Bogen gi und durchschneide ihn aus f mit ac in i. Die Gerade if gibt nun den Berührungspunkt e. Diese Construction folgt leicht aus dem vorigen §., denn ac = ef + eg = fi.

Mit Hülfe des Verfahrens §. 122. kann eine Tangente an die Ellipse gezogen werden, die mit einer gegebenen Geraden parallel ist.

Anmerkung. Nach Gründen der analytischen Geometrie findet man den Berührungspunkt einer mit einer Geraden parallelen Tangente an einer Ellipse,

wenn man mit dieser Geraden eine parallele Sehne und nach deren Mitte einen Durchmesser zieht. Die Enden desselben sind nun Berührungspunkte von Tangenten, die mit der gegebenen Geraden parallel sind.

§. 132. Zusatz.

Da die Projectionen eines Kreises auf einer nicht mit der Ebene des Kreises parallelen Ebene, Ellipsen sind, so können sie mit Berücksichtigung dessen, was in §. 81. über die Projicirung eines Kreises gesagt worden ist, nach §. 128. construirt werden.

B. Parabel.

§. 133.

Wenn cd (Fig. 44.) senkrecht auf ab ist und e beliebig in cd angenommen wird, so gibt es eine krumme Linie gfh, in welcher jeder Punkt, z. B. h, vom Punkt e und der Geraden ab gleichen Abstand hat. Eine solche Curve heißt Parabel. Die Linie cd heißt die Achse, e der Brennpunkt, f der Scheitel und ab die Leitlinie oder Directrix derselben. Schneidet man einen Kegel mittelst einer Ebene parallel mit einer seiner Seitenlinien, so ist der Schnitt auf der Kegelfläche eine Parabel.

§. 134. Construction.

Aus dieser Erklärung ergibt sich leicht folgende Construction der Parabel. Man mache cd (Fig. 44.) senkrecht auf ab, wähle e in cd; die Mitte f von ce ist der Scheitel. Ferner ziehe man eine Gerade gh durch einen willkührlichen Punkt d senkrecht auf cd und durchschneide sie in g und h mit cd aus e, so sind g und h zwei Punkte der Parabel. Auf dieselbe Art sucht man noch mehr Punkte und verbindet sie gehörig mit einander.

§. 135. Aufgabe.

In einem Punkt h (Fig. 44.) eine Tangente an eine Parabel zu ziehen.

Man mache hb senkrecht auf ab, ziehe he und halbire den Winkel ehb durch ih, so ist ih die verlangte Tangente. Es ist nämlich, wenn ik senkrecht auf ab ist,

$$ie = ib$$
$$ib > ik$$

folglich liegt i näher an ab als an e, also nicht in der Parabel.

§. 136. Aufgabe.

Von einem außerhalb einer Parabel liegenden Punkte und parallel mit einer gegebenen Geraden eine Tangente an die Parabel zu ziehen.

Ist i (Fig. 44.) der gegebene Punkt, so durchschneidet man die Leitlinie ab aus i mit ie in b, zieht bh mit cd parallel; der Durchschnitt h ist nun der Berührungspunkt, mithin ih die Tangente, wie sich dieß aus dem vorigen §. leicht einsehen läßt.

Mit einer gegebenen Geraden zieht man endlich nach §. 122. eine parallele Tangente an die Parabel.

Anmerkung. Nach Gründen der analytischen Geometrie läßt sich eine mit einer Geraden parallele Tangente auch auf folgende Art an eine Parabel ziehen. Man ziehe eine mit der Geraden parallele Linie, welche die Parabel zweimal schneidet, und durch ihre Mitte mit der Achse eine Parallele, so ist deren Durchschnitt mit der Parabel der gesuchte Berührungspunkt, durch welchen nun die Tangente gezogen werden kann.

C. Hyperbel.

§. 137.

Wenn eine krumme Linie abc (Fig. 45.) von der

Art ist, daß die Differenz df der Entfernungen cd, ce eines jeden ihrer Punkte, z. B. des Punktes c, von zwei andern festen Punkten d und e, stets einer und derselben Geraden gh gleich ist, so ist die krumme Linie abc eine **Hyperbel**. Da man die kleinere Entfernung ce eben so gut auf den Punkt d, als auf e beziehen kann, so gibt es noch eine Hyperbel ikl, deren Punkte gleichfalls der Bedingung entsprechen. Die Punkte d, e heißen **Brennpunkte**, b und k **Scheitel**, die Gerade bk heißt die **Achse** und ihre Mitte der **Mittelpunkt** der Hyperbel. Wenn ein Kegel mittelst einer Ebene so geschnitten wird, daß die Ebene eine Seite des Kegels, und zugleich noch die Verlängerung einer andern Seite desselben jenseits der Spitze schneidet, so entsteht auf der Oberfläche des Kegels eine Hyperbel.

§. 138. Construction.

Um aus den gegebenen Brennpunkten d, e (Fig. 45.) und der Geraden gh die Hyperbel zu beschreiben, verlängere man die Gerade gh unbestimmt bis m, beschreibe mit gm aus d bei a und c Bogen und durchschneide sie aus e mit hm. Dadurch ergeben sich die Punkte c, a der Hyperbel; verändert man die Verlängerung hm, so erhält man auf dieselbe Weise noch mehr Punkte, und durch ihre Verbindung die Hyperbel. Die andere Hyperbel wird erhalten, indem man die Operationen aus den Punkten d und e verwechselt. Man sieht, daß bk = gh wird.

§. 139. Aufgabe.

In einem Punkte c (Fig. 45.) eine Tangente an eine Hyperbel zu ziehen.

Man ziehe die Geraden cd, ec nach den Brennpunkten und halbire den Winkel dce durch nc, so ist

diese Linie die verlangte Tangente; denn es ist dn < (df + fn) oder, da fn = en ist, dn < (df + en) und zieht man hier auf beiden Seiten en ab, so bleibt dn — en < df. Da nun diese Größen bei der Hyperbel einander gleich sein müssen, so folgt daraus, daß n kein Punkt derselben ist. Eben so kann von jedem andern Punkt der Geraden nc, außer c, gezeigt werden, daß er außerhalb der Hyperbel liegt, daß mithin diese Gerade eine Tangente ist.

§. 140. Aufgabe.

Von einem außerhalb einer Hyperbel liegenden Punkte und parallel mit einer gegebenen Geraden eine Tangente an die Hyperbel zu ziehen.

Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte n (Fig. 45.) mit ne einen Bogen ef, und durchschneide ihn aus d mit der zum Grund gelegten Geraden gh = bk in f. Der Durchschnitt c der Geraden df mit der Hyperbel gibt den Berührungspunkt c. Dies folgt leicht aus dem vorigen §.

Nach §. 122. kann man eine Tangente an eine Hyperbel ziehen, die mit einer Geraden parallel ist.

Anmerkung. Es kann, wie die analytische Geometrie lehrt, auch auf folgende Art eine Tangente parallel mit einer Geraden gezogen werden. Man ziehe zwei mit der Geraden parallele Sehnen und durch ihre Mitten eine Gerade, so ist deren Durchschnitt mit der Hyperbel der gesuchte Berührungspunkt.

§. 141. Aufgabe.

Zu einem Punkte einer Ellipse, Parabel und Hyperbel, oder von einem außerhalb dieser Curven liegenden Punkte eine Normale zur Curve zu ziehen.

Hinsichtlich der ersten Forderung ziehe man durch den gegebenen Punkt eine Tangente an die Curve und

errichte in dem Punkte eine Senkrechte auf sie, so ist diese die Normale. In Betreff der andern Forderung bestimme man den Berührungspunkt der zugehörigen Tangente nach §. 125. und ziehe durch ihn und den gegebenen Punkt eine Gerade, so ist sie die gesuchte Normale.

E v o l v e n t e.

§. 142.

Es sei aben (Fig. 46.) irgend eine Curve, z. B. ein Kreis. Denkt man sich eine Gerade rs, welche sich so um die Curve bewegt, daß sie stets Tangente daran ist und nicht fortgleitet, so wird jeder Punkt wie d derselben eine Curve wie edlkc beschreiben. Diese Curve heißt E v o l v e n t e oder A b w i c k e l u n g s l i n i e; dagegen heißt die Curve aben, um welche rs gleichsam gewickelt war, E v o l u t e oder U m w i c k e l u n g s l i n i e. Man kann sich unter rs einen Faden vorstellen, der sich von der Curve aben abwickelt und dabei stets angespannt ist. Die Linien bd, hl, gk stellen dann einzelne Lagen des Fadens während der Abwickelung vor.

§. 143.

Jedes Element mm (Fig. 46.) der Evolvente ist senkrecht auf der entsprechenden Richtung rs der beweglichen Geraden, denn es kann als ein Element eines Kreisbogens angesehen werden, der mit bd aus b beschrieben wird, und ein solches Element steht senkrecht auf dem zugehörigen Halbmesser. Es ist also die Gerade bd die Normale der Evolvente im Punkt d und die darauf Senkrechte td die Tangente. D i e N o r m a l e n d e r E v o l v e n t e s i n d d a h e r T a n g e n t e n a n d e r E v o l u t e.

§. 144. Z u s a t z.

Denkt man sich zwei an einander liegende Elemente

ab, bc (Fig. 47.) irgend einer Curve de und die Geraden fg, fh in ihren Mitten senkrecht auf sie errichtet, so ist deren Durchschnitt f der Mittelpunkt eines Kreises, der durch die drei Punkte a, b, c der Curve geht, und fb ist der Halbmesser. Da nun diese Punkte einander unendlich nahe liegen, so kann man sagen, daß die Curve und der mit fb aus f beschriebene Kreis die zwei Elemente ab, bc gemein haben, daß also die Krümmung der Curve im Punkt b durch die Krümmung des Kreises gemessen wird. Dieser Kreis heißt deßhalb der Krümmungskreis und sein Halbmesser der Krümmungshalbmesser der Curve im Punkt b. So ist z. B. in Fig. 46. bd der Krümmungshalbmesser der Evolvente im Punkt d. Es ist klar, daß zu jedem andern Punkte einer Curve ein eigner Krümmungshalbmesser gehört, und daß sie alle von einander verschieden sind, wenn die Krümmung der Curve nicht einerlei ist. Uebrigens fällt die Richtung des Krümmungshalbmessers stets mit der Normale des betreffenden Punktes zusammen und seine jedesmalige Größe hängt von der Natur der Curve ab.

Es liegt, wie bereits erwähnt worden ist, außerhalb der Gränzen dieses Werkchens, weiter in diese Materie einzugehen.

§. 145. Construction.

Aus der Entstehungsart der Evolvente, §. 142., ist leicht ersichtlich, daß die Geraden gk, hl, bd (Fig. 46.) der Länge der entsprechenden Bogen gc, hgc, bhgc der Evolute gleich sind. Hieraus geht folgende Construction der Evolvente hervor. Man theile die Bogen gc, hc, . . . der Evolute in so kleine Theile, daß sie als gerad betrachtet werden können, ziehe durch alle Theilungspunkte Tangenten an die Evolute, und beschreibe aus dem

zweiten Theilungspunkt vom ersten an einen Bogen bis an die Tangente am zweiten, aus dem dritten einen sich an jenen anschließenden Bogen bis zur Tangente an dem dritten ꝛc. Auf diese Art erhält man eine aus lauter kleinen Kreisbogen zusammengesetzte Evolvente.

§. 146.

Wenn Evolvente und zugehörige Evolute bekannt sind, und man an die Evolute von einem außerhalb liegenden Punkte eine Tangente zu ziehen weiß, so ist es leicht in einem Punkt d (Fig. 46.) der Evolvente eine Tangente an dieselbe zu führen. Man zieht nämlich von d eine Tangente an die Evolute und macht td im Punkt d senkrecht darauf.

Soll umgekehrt vom Punkt t eine Tangente an die Evolvente gezogen werden, so suche man nach §. 120. den Berührungspunkt d. Ist endlich eine Tangente parallel mit einer Linie zu ziehen, so geschieht es nach §. 122. In Betreff der Normalen vergleiche §. 143. und verfahre ganz wie in §. 141. bei den Kegelschnitten.

§. 147. Anmerkung.

Die Evolvente findet nach Gründen der Mechanik unter andern ihre Anwendung bei den gekrümmten Theilen der Hebedaumen bei Stampfmühlen und der Zähne eines Getriebes, das eine gezähnte Stange oder einen Kammbaum treibt.

Cykloiden.

§. 148.

Wenn ein Kreis adgh (Fig. 48.) eine Gerade ai berührt und sich auf derselben in einer Ebene fortbewegt, so beschreibt der Berührungspunkt a eine krumme Linie alri, welche Cykloide oder Radlinie heißt. Die Gerade ai heißt die Grundlinie, und der Kreis adgh der Erzeugungskreis.

Bewegt sich der Kreis adgh (Fig. 49.) auf der Peripherie eines andern Kreises aiv außerhalb und in der Ebene dieses Kreises, so heißt die vom Berührungspunkt a beschriebene krumme Linie alri Epicykloide. Der Kreis aiv heißt Grundkreis.

Bewegt sich auf gleiche Weise ein Kreis adgh (Fig. 50.) innerhalb des Grundkreises, so beschreibt der Berührungspunkt a eine Hypocykloide alri.

§. 149. Construction.

Es ist klar, daß sich die ganze Peripherie des Erzeugungskreises auf der Grundlinie abgewickelt hat, sobald der erzeugende Punkt a (Fig. 48.) wieder Berührungspunkt wird. Man theile deßhalb die halbe Peripherie adg in eine beliebige Anzahl gleiche, jedoch nicht zu große Theile, z. B. in 6, und trage sie von a gegen i; so ist ag′ gleich der halben Peripherie, ad′ gleich dem Bogen ad 2c. In der mit der Grundlinie parallelen Linie kp bewegt sich der Mittelpunkt fort. Errichtet man in b′, c′, d′... Senkrechte auf die Grundlinie, so entstehen mit kp die Punkte l, m, n,..., in welche der Mittelpunkt des Erzeugungskreises kommt, wenn sich dessen Punkte b, c, d... gleichsam auf ai in b′, c′, d′... niedergelegt haben. Man denke sich nun den Kreis in diesen Lagen, so kommt es darauf an, zu bestimmen, wo sich alsdann der Erzeugungspunkt a befindet. Wenn sich die Punkte b, c, d... nach und nach mit b′, c′, d′... vereinigen, so hat offenbar der Punkt a, in den zugehörigen Kreislagen die Entfernungen ab, ac, ad... von b′, c′, d′..., so daß also z. B., wenn d nach d′ kommt, dadurch die Sehne ad die Lage d′q in dem aus n beschriebenen Kreise erhält. Man darf also der Reihe nach nur die Sehnen ab, ac, ad, ae, af aus b′, c′, d′, e′, f′ in die aus l, m, n... beschriebenen Kreise tragen, so erhält

man dadurch Punkte wie q, r der Cykloide, die man mit einander verbinden muß. Die andere Hälfte der Cykloide erhält man leicht durch Uebertragung.

Diese Construction gilt auch ganz für die Epicykloide Fig. 49. und Hypocykloide Fig. 50., wenn man Grundkreis statt Grundlinie setzt.

§. 150.

Sehnen wie d'q, e'r... (Fig. 48., 49., 50.) sind zugleich, wie die analytische Geometrie lehrt, die Normalen in den Punkten q, r... der krummen Linien und daher die auf ihnen in q, r... senkrechten Linien Tangenten in diesen Punkten an den Curven. Wenn daher in einem Punkte eine Tangente an diese Curven gezogen werden soll, so zieht man nur die Normale und darauf eine Senkrechte.

Die Bestimmung der Normale erfordert aber die Lage des Erzeugungskreises in dem Moment, als der betreffende Punkt erzeugt wurde, und es kommt daher darauf an, durch einen Punkt, z. B. den Punkt r, einen Kreis vom Durchmesser ag so zu ziehen, daß er die Grundlinie, oder den Grundkreis ai berührt. Da nund er Mittelpunkt dieses Kreises in der, um den Halbmesser des Erzeugungskreises von ai entfernten Parallellinie kp mit ai liegt, so erhält man ihn, indem man die Linie kp aus dem gegebenen Punkt mit dem Halbmesser ak durchschneidet.

Ist von einem außerhalb liegenden Punkte, oder mit einer Linie parallel an die Curve eine Tangente zu ziehen, so verfährt man nach §. 120. und §. 122. Eine Normale von einem außerhalb liegenden Punkte kann wie in §. 141. gezogen werden.

§. 151. Anmerkung.

Diese krummen Linien werden nach Gründen der Mechanik vorzüglich bei der Form der Zähne an Rä-

dern angewendet. Namentlich erhalten die Zähne eines Kammbaumes, der ein Getriebe oder einen Drilling in Bewegung setzt, die Krümmung der Cykloide. Wird ein Drilling durch ein Rad getrieben oder umgekehrt, so erhalten die Stäbe des Drillings und die Zähne des Rades, die epicykloidische Form.

S c h r a u b e n l i n i e.

§. 152.

Von den doppelt gekrümmten Linien soll hier nur die Schraubenlinie näher betrachtet werden. Sie ist eine auf einer Cylinderfläche dergestalt gezeichnete krumme Linie, daß der sie erzeugende Punkt alle Seitenlinien der Cylinderfläche unter einem beständigen Winkel durchschneidet. Derjenige Theil einer solchen krummen Linie, der sich von irgend einem Punkte an bis zu demjenigen Punkte erstreckt, wo die Schraubenlinie das nächste mal von derselben Seitenlinie der Cylinderfläche geschnitten wird, welche durch den ersten Punkt ging, heißt S c h r a u b e n g a n g, und der Abstand dieser zwei Punkte heißt die H ö h e des Schraubengangs.

§. 153.

Denkt man sich einen solchen Schraubengang mit dem Theil der Cylinderfläche, auf welchem er sich befindet, auf einer Ebene ausgebreitet, so bildet er eine gerade Linie, weil alle Elemente der Schraubenlinie die parallelen Seiten der Cylinderfläche unter gleichen Winkeln schneiden und eines an das andere stößt. Ein Schraubengang ist demnach die Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Höhe die Höhe des Schraubengangs und dessen Grundlinie der Kreisumfang des Cylinders ist. Wenn daher aa' (Fig. 51.) gleich der Peripherie $a'd'g'k'a'$ der Grundfläche des geraden Cylinders und $a'n$, senkrecht auf aa', die Höhe des Schrau-

bengangs ist, so ist die Hypotenuse an der Weg des Erzeugungspunktes, oder der entwickelte Schraubengang. Theilt man nun aa′ und die Peripherie a′d′g′k′a′ in eine beliebige gleiche Anzahl gleiche Theile, z. B. in zwölf in den Punkten o, p, q . . . b′, c′, d′ . . ., so zeigen die Perpendikel ob, pc, qd . . . diejenige Höhe des Erzeugungspunktes an, welche er hatte, als er sich, von a′ ausgehend, senkrecht über b′, c′, d′ ... befand und es ist ob = $\frac{1}{12}$a′n, pc = $\frac{2}{12}$a′n, dq = $\frac{3}{12}$a′n ꝛc., so daß man also auch sagen kann, die Schraubenlinie werde durch einen Punkt erzeugt, der sich auf einer Cylinderfläche bewegt, und sich in demselben Maße erhebt, als er Theile des Umfangs zurücklegt.

§. 154. Construction.

Der Kreis a′ b′ c′... (Fig. 51.) sei die Horizontal-, a″ t″ w″ v″ die Vertikalprojection des Cylinders und a″ n″ die Höhe des Schraubengangs. Man theile a′b′c′... in eine beliebige Anzahl gleiche Theile z. B. in 12 (je mehr, desto richtiger wird die Schraubenlinie) und ziehe die Vertikalprojectionen o′m″, p′l″, q′k″... der den Theilungspunkten b′, c′, d′ . . . entsprechenden Seiten des Cylinders. Da der Erzeugungspunkt, wenn er sich senkrecht über b′, c′, d′ . . . befindet, die Höhen $\frac{1}{12}$a″n″, $\frac{2}{12}$a″n″, $\frac{3}{12}$a″n″ ꝛc. über der Horizontalebene hat (§. 153.), so mache man o′b″ = $\frac{1}{12}$a″n″, p′c″ = $\frac{2}{12}$a″n″, q′d″ = $\frac{3}{12}$a″n″ ꝛc. Zu dem Ende kann man a″n″ in 12 gleiche Theile theilen und durch die Theilungspunkte Parallellinien mit a″t″ bis zum Durchschnitt mit den Vertikalprojectionen der den Theilungspunkten entsprechenden Seitenlinien der Cylinderfläche ziehen. Auf diese Weise ergibt sich z. B. der Punkt k″ durch die Parallellinie durch den Theilungspunkt 9. Eben so erhält man die Punkte b″, c″, d″, ... g″... k″, l″, m″, und durch ihre ge-

hörige Verbindung einen Schraubengang. Macht man $b''o''$, $c''p''$, $d''q''$, ... $= a''n''$, so erhält man Punkte des zweiten Schraubengangs ꝛc.

§. 155.

Da die Tangente an der Schraubenlinie ein Element mit dieser gemein hat und die Verlängerung dieses Elementes ist; da ferner alle Elemente der Schraubenlinie bei der Abwickelung in eine gerade Linie fallen, welche als die Verlängerung eines jeden Elementes derselben betrachtet werden kann (§. 153.); so liegen in dieser geraden Linie alle Tangenten, und der Winkel naa' (Fig. 51.), welchen sie mit aa' macht, ist der constante Winkel der Schraubenlinie mit der Basis des Cylinders, so wie jeder Tangente an derselben mit der Horizontalebene. Hiernach ist es leicht in einem Punkte c', c'' der Schraubenlinie eine Tangente an sie zu ziehen. Sie darf nur so gezogen werden, daß sie mit der Horizontalebene den Winkel naa' macht. Ihre Horizontalprojection ist Tangente am Kreis $a'b'c'$... in c' (§. 113.), also senkrecht auf dem Halbmesser Cc'. Die Länge $c'x'$ bis zum Durchschnitt der Tangente im Raume mit der Horizontalebene, ist offenbar gleich ap; führt man x' auf die Basis, so wird x'', und mithin die Vertikalprojection $c''x''$ der Tangente erhalten.

Was die Darstellung einer Schraube selbst betrifft, sehe man §. 237. Wie eine Schraubenlinie auf eine Kegelfläche gezeichnet wird, werden wir im 10. Abschnitt §. 239. sehen.

Sechster Abschnitt.

Darstellung der krummen Flächen.

§. 156.

Eine Fläche ist bestimmt oder graphisch dargestellt, wenn mittelst der Projectionsebenen jeder ihrer Punkte bestimmt werden kann. Bei der Darstellung der Linien wurde jeder einzelne Punkt derselben wirklich durch seine beiden Projectionen dargestellt. Wollte man diese Verfahrungsart auch bei den Flächen anwenden, so müßte man nicht blos jeden Punkt projiciren, sondern man müßte auch noch seine Projectionen durch eine gerade Linie verbinden, um sie nicht mit andern zu verwechseln. Dadurch würde aber die Zeichnung von einer unendlichen Menge von Linien überladen, die nur Verwirrung erzeugen würden und nicht geeignet wären, genaue Darstellungen zu geben. Es ist auch wirklich bisher die Ebene, als die einfachste Fläche, nicht durch die Projectionen ihrer Punkte, sondern durch die Projicirung zweier darin liegenden Linien dargestellt worden (§. 10.), und es kommt nun darauf an, eine ähnliche Darstellungsweise für gekrümmte Flächen anzugeben.

§. 157.

Auf eine solche Darstellungsweise werden wir leicht durch die Entstehung der Flächen geleitet. Jede Fläche kann man sich nämlich durch die Bewegung einer Linie entstanden denken. So kann z. B. die ebene Fläche entstehen, indem sich eine gerade Linie auf einer andern Geraden, sich stets parallel bleibend, fortbewegt; oder auch durch die Bewegung einer Geraden auf zwei andern Geraden, die sich schneiden, oder parallel sind; oder auch indem sich die Gerade, mit einem Ende fest, auf einer andern Geraden fortbewegt.

Auf eine ähnliche Weise kann man sich jede krumme Fläche durch die Bewegung einer geraden oder einer krummen Linie entstanden denken. Eine Kugelfläche wird z. B. durch die Peripherie eines Kreises erzeugt, der sich um einen seiner Durchmesser bewegt, oder auch durch einen Kreis, der einen andern Kreis senkrecht schneidet, sich in dieser Lage fortbewegt, und dabei seinen Durchmesser so ändert, daß dieser stets der Durchschnitt beider Kreisflächen ist. Eine Cylinderfläche wird erzeugt, indem sich eine gerade Linie an der Peripherie eines Kreises so fortbewegt, daß sie stets mit einer gegebenen Geraden parallel bleibt, welche mit der Ebene des Kreises irgend einen Winkel bildet. Die Cylinderfläche kann auch durch diesen Kreis erzeugt werden, wenn er sich an jener Geraden so fortbewegt, daß er sich stets parallel bleibt und der Weg seines Mittelpunktes eine gerade Linie wird.

Eine Linie, welche durch ihre Bewegung irgend eine Fläche erzeugt, heißt die Erzeugungslinie dieser Fläche.

§. 158.

Diese wenigen Beispiele werden einstweilen hinreichend sein, um sich einen Begriff von der Entstehungsart krummer Flächen machen, und zugleich einsehen zu können, daß eine krumme Fläche auf mehrere Arten erzeugt werden kann, wobei entweder die Erzeugungslinie selbst, oder ihre Lage, oder beide zugleich veränderlich sein können. So ändert z. B. bei der ersten der angegebenen Entstehungsarten der Kugelfläche, die Erzeugungslinie blos die Lage, bei der zweiten Entstehungsart aber Lage und Größe zugleich. Auf welche Art aber auch eine Fläche erzeugt werden mag, so ist klar, daß zur Bestimmung dieser Fläche stets die Erzeugungslinie, das Gesetz ihrer Bewegung und, wenn

sie sich ändert, das Gesetz dieser Veränderung bekannt sein müssen. Denken wir uns z. B. durch irgend einen Punkt a eine Vertikallinie gezogen, in welcher sich der Mittelpunkt eines stets horizontal bleibenden Kreises fortbewegt; der Halbmesser dieses Kreises sei während der Bewegung desselben stets dem Abstande des Mittelpunktes vom Punkte a gleich. Man wird leicht einsehen, daß dieser Kreis die Kegelfläche eines geraden Kegels erzeugt, und daß die Erzeugung dieser Fläche durch folgende Bedingungen bestimmt wird: 1) daß der Kreis oder die Erzeugungslinie horizontal sei; 2) daß sein Mittelpunkt in der Geraden bleibe; 3) daß der Halbmesser immer dem Abstande des Centrums von einem gewissen Punkte a gleich sei. Hier ändern sich also Lage und Größe der Erzeugungslinie, und beide nach gewissen Gesetzen.

Das Gesetz der Bewegung der Erzeugungslinie wird meistens dadurch ausgedrückt, daß sie ihre ursprüngliche Lage gegen eine andere bekannte Linie beibehalten und sich an ihr fortbewegen soll. Diese Linie heißt Directions- oder Leitlinie. So ist z. B. bei der ersten Erzeugungsart der Cylinderfläche (§. 157.) der Kreis, und bei der zweiten die gerade Linie die Directionslinie. Diese Linie zeichnet also der Erzeugungslinie gleichsam den Weg vor, den sie während ihrer Bewegung zu nehmen hat. Außerdem drückt sie aber bisweilen auch noch das Gesetz der Veränderlichkeit der Erzeugungslinie aus. In der §. 157. erwähnten zweiten Entstehungsart der Kugelfläche ist z. B. der Kreis, welchen der Erzeugungskreis senkrecht schneidet, die Directionslinie und drückt zugleich den Grad der Veränderlichkeit des Durchmessers vom Erzeugungskreis dadurch aus, daß dieser Durchmesser stets der Durchschnitt beider Kreise sein soll.

§. 159.

Durch die bisherigen Betrachtungen über die Entstehung der krummen Flächen überzeugt man sich, daß sie auf eine ähnliche Art, als die Ebenen, d. i. durch einzelne Linien, dargestellt werden können. Man projicirt nämlich die Directionslinie und die Erzeugungslinie; von dieser gibt man dann noch so viele einzelne Lagen, als zur Erkennung der Fläche nöthig sind. Man stellt demnach nur einzelne Elemente der krummen Fläche vor, insoferne man sich nämlich unter einer Lage der Erzeugungslinie ein Element denkt; zeigt aber durch die Directionslinie und die bekannte Entstehungsart der krummen Fläche die Ordnung an, in welcher die übrigen Elemente auf einander folgen, und wie jedes einzelne derselben, nämlich jede einzelne Lage der Erzeugungslinie, nach Verlangen bestimmt werden kann. Unter diesen Lagen gibt es einige, deren Projectionen besonders geeignet sind, die Gestalt und Lage der Fläche erkennen zu lassen, und welche man deßhalb gewöhnlich angibt. Es sind begreiflich diejenigen, welche durch ihre Projectionen gleichsam die Umrisse (Contouren) der Projectionen der dargestellten Fläche bilden, d. i. diejenigen, deren Projectionen auf einer Projectionsebene die Projectionen aller übrigen Lagen ganz einschließen.

§. 160.

Wir gehen nun zur Darstellung der krummen Flächen selbst über. In der Praxis kommen in der Regel nur solche vor, die von der geraden Linie und von dem Kreise erzeugt werden. Von jenen sollen hier die cylindrischen, konischen und sogenannten regelrechten oder windschiefen, von diesen die Umdrehungs- oder Revolutionsflächen näher betrachtet werden.

Cylindrische Flächen.

§. 161.

Diejenigen krummen Flächen, welche von einer geraden, sich stets parallel bleibenden Linie erzeugt werden, die sich an einer Curve fortbewegt, heißen cylindrische Flächen. Die Gerade ist die Erzeugungslinie, die Curve die Directionslinie. Beide können indessen auch verwechselt werden, denn dieselbe cylindrische Fläche entsteht, wenn sich die Curve als Erzeugungslinie an der Geraden als Directionslinie so fortbewegt, daß alle ihre Punkte gerade Parallellinien erzeugen. Ist die Curve ein Kreis, so wird die cylindrische Fläche insbesondere Cylinderfläche genannt, zumal wenn sie begrenzt ist. Dann wird auch die krumme Directionslinie gewöhnlich in der horizontalen Projectionsebene angenommen und Basis der Cylinderfläche genannt; sie ist alsdann zugleich die Horizontaltrace der Cylinderfläche, d. i. der Durchschnitt derselben mit der Horizontalebene.

§. 162. Aufgabe.

Die Projectionen a′b′c′d′, a″b″c″d″ Fig. 52. der Directionslinie und die e′f′, e″f″ der Erzeugungslinie einer cylindrischen Fläche sind gegeben. Man soll diese Fläche nebst ihren Tracen darstellen.

Um die Grenzen der Projectionen der Fläche zu erhalten, führt man die Erzeugungslinie durch die äussersten Punkte der Directionslinie, d. i. in Bezug auf die Horizontalprojection durch a und c, und in Bezug auf die Vertikalprojection durch b und d. Jene Punkte erkennt man leicht an ihren Projectionen a′ und c′, diese ergeben sich durch die mit e″f″ parallelen Tangenten d″i″, b″k″ an der Vertikalprojection der Directionslinie. Diese Tangenten sind zugleich die Vertikalprojectionen der Erzeugungslinie in ihrer höchsten

und tiefsten Lage, und schließen demnach die ganze Vertikalprojection der Fläche ein; ihre Horizontalprojectionen d′i′, b′k′ ergeben sich leicht, wenn man durch die Horizontalprojectionen der Punkte d, b Parallellinien mit der Horizontalprojection e′f′ der Erzeugungslinie zieht. Eben so sind die mit e′f′, durch die äußersten Punkte a′, c′ der Horizontalprojection der Directionslinie parallel gezogenen Linien a′g′, c′h′ die Projectionen der beiden äußersten Lagen der Erzeugungslinie in Bezug auf die Horizontalebene; sie schliessen daher die Horizontalprojection der Fläche ein. Ihre Vertikalprojectionen werden erhalten, wenn man durch die Vertikalprojectionen a″, c″ der Punkte a, c der Directionslinie mit e″f″ die Parallellinien a″g″, c″h″ zieht.

Diese vier äußersten Lagen der Erzeugungslinie reichen mittelst ihrer Projectionen l′g′, l″g″; m′k′, m″k″; n′h′, n″h″; o′i′, o″i″ zur Darstellung der ganzen cylindrischen Fläche hin, weil sie die Contouren der Projectionen bilden; meistens werden sogar nur die Linien l′g′, n′h′ und o″i″, m″k″ angegeben. Will man übrigens noch mehr Lagen der Erzeugungslinie projiciren, so darf man nur durch die Projectionen eines und desselben Punktes der Directionslinie mit den entsprechenden Projectionen der Erzeugungslinie Parallellinien ziehen.

Die Tracen der cylindrischen Fläche sind nichts anders als die gehörige Verbindung einer Reihe von Punkten, in denen die Projectionsebenen von der Erzeugungslinie in ihren verschiedenen Lagen geschnitten werden. Um sie daher zu erhalten, darf man nur die Durchschnitte l′, m′, n′, . . .; g″, k″, h″, . . . einzelner Lagen lg, mk, nh, . . . der Erzeugungslinie mit den Projectionsebenen nach §. 28. bestimmen. Durch die Verbindung einer hinreichenden Anzahl solcher Durch-

schnittspunkte in jeder Projectionsebene erhält man die Tracen l'm'n'p'o', i''g''k''h''f'' der cylindrischen Fläche.

Nimmt man die Horizontaltrace zur Directionslinie, oder diese vielmehr in der Horizontalebene an, wie es der Kürze wegen gewöhnlich geschieht, wenn die Directionslinie eine ebene Curve ist, so kann man sich eine klarere Idee von der Gestalt und Lage der cylindrischen Fläche machen, als wenn die Directionslinie nicht in einer Projectionsebene liegt. Die Tracen tragen überhaupt sehr viel zur leichten Versinnlichung der krummen Flächen im Raume bei.

§. 163. Zusatz.

Was die Ausführung der Zeichnung betrifft, so wird man leicht einsehen, daß der Theil l'o'p'n' (Fig. 52.) der Horizontaltrace und der zugehörige Theil der Fläche, mithin alle Lagen der Erzeugungslinie, die vom Bogen l'o'p'n' ausgehen, in der Horizontalprojection sichtbar sind. Dagegen werden die Elemente der Fläche, welche vom Bogen l'm'n' ausgehen, in Bezug auf die Horizontalebene nicht gesehen, weil sie durch jenen Theil der cylindrischen Fläche bedeckt sind. In der Vertikalprojection sieht man offenbar die Projectionen derjenigen Lagen der Erzeugungslinie, welche vom Bogen o'p'm'n' der Horizontaltrace ausgehen; hingegen jene nicht, die den Bogen o'l'm' zur Directionslinie haben. Dieses alles wird man leichter begreifen, wenn man sich die Fläche wirklich im Raume und die Vertikalebene um die Basis senkrecht auf die Horizontalebene aufgerichtet denkt, sodann die Fläche gerade von oben und von vornen in senkrechter Richtung auf die Projectionsebenen betrachtet. Es ist, wie wir noch später sehen werden, sehr wesentlich, die Projectionen der sichtbaren Theile dargestellter Gegenstände, und

insbesondere der krummen Flächen von denen der unsichtbaren zu unterscheiden. Man muß sich daher bemühen, diese Sache klar aufzufassen, und dieß kann mit Hülfe der Tracen der krummen Flächen, oder der Versinnlichung des betreffenden Gegenstandes im Raume ohne Schwierigkeiten geschehen.

§. 164. Aufgabe.

Die Horizontalprojection s′ (Fig. 52.) eines Punktes s einer cylindrischen Fläche ist gegeben. Man soll seine Vertikalprojection bestimmen.

Eine Parallellinie p′f′ durch s′ mit der Horizontalprojection der Erzeugungslinie ist die Projection derjenigen Lagen dieser Linie, in welchen sie sich senkrecht über p′f′ befindet. Solcher Lagen gibt es offenbar zwei; die eine p′f′ geht vom Punkt p′, die andere q′r vom Punkt q′ der Horizontaltrace aus. Die Vertikalprojectionen dieser Lagen sind p″f″, q″r″, und in jeder derselben kann die gesuchte Vertikalprojection des Punktes s liegen. Da sie nun auch in dem Perpendikel von s′ auf die Basis liegt, so ist sie einer der zwei Durchschnitte s″, s″ dieses Perpendikels mit jenen Projectionen p″f″, q″r″ und daher nicht ganz bestimmt. Es gibt mithin in der Fläche zwei Punkte, deren Projectionen in den Punkt s′ fallen. Dieses ist offenbar mit allen Punkten der cylindrischen Fläche der Fall, deren Projectionen nicht in den Contouren der Projection liegen. Wäre umgekehrt die Vertikalprojection eines Punktes der Fläche gegeben, so fände man unter derselben Voraussetzung zwei Horizontalprojectionen.

Wie verfährt man, wenn statt der Projection eines Punktes die eine Projection irgend einer Linie in der Cylinderfläche gegeben ist und die andere bestimmt werden soll?

Konische Flächen.

§. 165.

Konische Flächen sind solche, welche durch eine gerade Linie erzeugt werden, die beständig durch einen festen Punkt geht und in ihrer Bewegung irgend einer Curve folgt. Diese Curve ist die Directionslinie. Ist sie ein Kreis, so heißt die Fläche insbesondere Kegelfläche und ihre Trace mit der Horizontalebene die Basis der Kegelfläche. Der feste Punkt heißt die Spitze der konischen Fläche. Man sieht leicht ein, daß die gerade Erzeugungslinie, wenn sie nicht ihren Endpunkt in der Spitze hat, zugleich zwei konische Flächen erzeugt, deren Spitzen zusammen fallen. Da indessen eine dieser Flächen wie die andere ist, so ist es hinreichend, nur eine derselben näher zu betrachten.

§. 166. Aufgabe.

Die Projectionen a′b′c′d′, a″b″c″d″ (Fig. 53.) der Directionslinie einer konischen Fläche, und der feste Punkt f′, f″, durch den die Erzeugungslinie derselben gehen soll, sind bekannt. Man soll die konische Fläche nebst ihrer Horizontaltrace darstellen.

Eine Gerade ef durch den Punkt f und einen Punkt e der Directionslinie ist die Erzeugungslinie; ihre Projectionen sind f′l′, f″l″. In Bezug auf die Vertikalebene sind die Geraden f″g″, f″i″ durch a″ und c″ die Vertikalprojectionen der äußersten Elemente der konischen Fläche; die zugehörigen Horizontalprojectionen sind f′g′, f′i′, durch a′ und c′ nach f′ gezogen. Rücksichtlich der Horizontalebene sind f′h′, f′k′, tangirend an a′b′c′d′ in b′ und d′, die Projectionen der äußersten Lagen der Erzeugungslinie; ihre Vertikalprojectionen gehen von f″ nach b″ und d″. Diese vier Projectionen bilden die Contouren der Projectionen

der konischen Fläche. Es ist hiernach sehr leicht, noch mehr Lagen der Erzeugungslinie zu projiciren.

Um die Horizontaltrace der konischen Fläche zu erhalten, verbindet man nur die Durchschnitte g′, h′, i′, l′, k′ ... einer hinreichenden Anzahl Lagen g′f, h′f, i′f, k′f, ... der Erzeugungslinie mit der Horizontalebene gehörig mit einander.

Auch bei konischen Flächen wird die Directionslinie, in so ferne sie eine einfach gekrümmte Curve ist, der Kürze und leichterer Verständlichkeit wegen, gewöhnlich in der Horizontalebene angenommen, und sie ist dann, wie bei der cylindrischen Fläche, zugleich die Trace der Fläche.

Was im §. 163. über die Ausführung der Zeichnung gesagt wurde, findet auch hier seine Anwendung.

§. 167. Aufgabe.

Aus der Horizontalprojection m′ (Fig. 53.) eines Punktes einer konischen Fläche g′h′i′k′f′, g″i″f″, dessen Vertikalprojection zu bestimmen.

Es verhält sich hier ganz wie in §. 164. Die Linie f′m′ durch den Punkt m′ ist die Projection zweier Lagen l′f, n′f der Erzeugungslinie, von denen jene in l′, diese in n′ in der Horizontalebene entscheidet. Die Vertikalprojectionen derselben sind l″f″, n″f″; mithin sind die Durchschnitte m″, m″ derselben mit dem Perpendikel m′m″ auf der Basis Punkte, die beide der Aufgabe entsprechen. Der Punkt m′ ist demnach die Projection zweier Punkte der konischen Fläche. Eben so verhält es sich mit allen Punkten innerhalb der Conturen der Projectionen.

Umhüllungsflächen.

§. 168.

Denken wir uns durch irgend einen festen Punkt

eine gerade Linie, die sich so bewegt, daß sie während dieser Bewegung stets eine krumme Fläche, z. B. eine Kugelfläche, berührt, so wird sie eine konische Fläche erzeugen, welche die krumme Fläche ganz umhüllt und berührt. Bewegt sich die Gerade stets parallel mit einer andern Geraden und berührt sie dabei immer die krumme Fläche, so erzeugt sie eine cylindrische Fläche, von welcher jene krumme Fläche umschlossen und berührt wird. Solche Flächen nun, welche durch eine gerade Linie erzeugt sind, und eine andere Fläche einhüllen und berühren, heißen Umhüllungsflächen.

§. 169.

Die einzelnen Berührungspunkte der, die Umhüllungsflächen erzeugenden Geraden mit der umhüllten Fläche bilden offenbar auf dieser Fläche eine Curve, und es ist klar, daß es bei der Darstellung solcher Umhüllungsflächen blos darauf ankommt, diese Berührungscurve zu bestimmen; denn sie ist nichts anders, als die Directionslinie einer cylindrischen, oder einer konischen Fläche, welche wir bereits darzustellen wissen. Auf welche Art man diese Berührungscurve bestimmt, werden wir später §. 193. 199. sehen. Hier wird nur noch bemerkt, daß diese Umhüllungsflächen hauptsächlich bei der Construction des Schattens ihre Anwendung finden.

Regelrechte Flächen.

§. 170.

Wenn sich eine Gerade so bewegt, daß keine zwei unmittelbar auf einander folgende Lagen derselben in einer und derselben Ebene liegen, so erzeugt sie eine krumme Fläche, welche eine regelrechte, bisweilen auch windschiefe Fläche genannt wird. Jenen Namen haben diese krummen Flächen, weil man die

Kanten eines Lineals nach gewissen Richtungen anlegen kann. Im Allgemeinen werden dergleichen Flächen durch eine Gerade erzeugt, wenn sie sich an drei Curven fortbewegt, die nicht in einer und derselben Ebene liegen. Diese Curven können sich auch in gerade Linien verwandeln. Statt der dritten Linie kann man auch andere Bedingungen machen; man kann z. B. sagen: die gerade Erzeugungslinie soll an zwei Linien so fortgleiten, daß sie beständig mit einer bekannten Ebene, z. B. mit einer der Projectionsebenen, parallel bleibt, wie dieß unter andern auch in §. 237 der Fall ist. Um einen Begriff von solchen Flächen und ihrer Darstellung zu geben, begnügen wir uns, zwei der gewöhnlichsten Fälle näher zu betrachten. Es würde die Grenzen dieses Werkchens überschreiten, wenn man sich mehr ins Einzelne einlassen wollte.

§. 171. Aufgabe.

An zwei Geraden a′b′, a″b″; c′d′, c″d″ (Fig. 54.) bewegt sich eine dritte Gerade so, daß sie stets mit der Vertikalebene parallel bleibt. Man soll die Fläche darstellen, welche dadurch erzeugt wird.

Um einzelne Lagen der Erzeugungslinie zu projiciren, führe man eine Reihe Ebenen, welche mit der Vertikalebene parallel sind und die beiden Directionslinien ab und cd schneiden. Die Geraden zwischen je zwei, der dadurch entstehenden und in einer solchen Ebene liegenden, Durchschnittspunkten, sind dann einzelne Lagen der Erzeugungslinie. Ist z. B. a′c′ die Trace einer solchen Ebene, so ist sie auch die Projection der in der Ebene liegenden Erzeugungslinie, deren Vertikalprojection sodann die Gerade a″c″ zwischen den Vertikalprojectionen a″, c″ der Punkte a, c ist, in welchen die Vertikalebene durch a′c′ die beiden Linien ab und cd schneidet. Auf dieselbe Art erhält

man noch die Projectionen $e'f'$, $e''f''$; $g'h'$, $g''h''$... anderer Lagen der Erzeugungslinie und dadurch die Projectionen $a'b'd'c'$, $a''b''d''c''$ der erzeugten Fläche.

Anmerkung. Ein Dach, dessen äußerste Sparren ungleiche Neigung haben, dabei aber in parallelen Giebelwänden liegen, ist z. B. eine Fläche der hier betrachteten Art. Die genannten beiden Sparren sind die Directionslinien und eine horizontale Gerade ist Erzeugungslinie. Die Latten stellen einzelne Lagen dieser Linie vor.

§. 172. Aufgabe.

Es sind drei gerade Linien gegeben. Man soll die Fläche darstellen, welche von einer Geraden erzeugt wird, die sich so bewegt, daß sie jene drei Linien stets berührt.

Der Einfachheit wegen ordne man die Projectionsebenen so an, daß die eine der drei Directionslinien, z. B. no (Fig. 55.), senkrecht auf der Horizontalebene ist und zugleich in der Vertikalebene liegt. Die Projectionen der beiden andern seien $a'b'$, $a''b''$; $c'd'$, $c''d''$. Man lege durch no eine Reihe vertikaler Ebenen, welche die beiden andern Linien ab und cd schneiden, und verfahre dann im Uebrigen ganz wie in der vorigen Aufgabe. Die Tracen der Vertikalebenen sind nc', nf', nh'... Man erhält dadurch die Projectionen $a'c'b'd'$, $a''c''b''d''$ der auf die angegebene Art erzeugten windschiefen Fläche.

Entwickelbare Flächen.

§. 173.

Entwickelbar nennt man Flächen, welche sich ohne Bruch und Verdoppelung auf einer Ebene ausbreiten lassen. Sie werden durch eine Gerade erzeugt, die sich so bewegt, daß je zwei unmittelbar auf einan-

der folgende Lagen derselben in einer und derselben Ebene liegen. Da nämlich zwei solcher Lagen unendlich nahe beisammen liegen, so kann das zwischen ihnen enthaltene Element der Fläche als eben betrachtet werden, und es schneiden sich alsdann neben einander liegende Elemente in geraden Linien. Dreht man nun das erste Element um seinen Durchschnitt mit dem zweiten bis in die Ebene des zweiten, eben so diese Ebene um den nächsten Durchschnitt bis in die Ebene des dritten Elementes rc., so sieht man, daß sich auf diese Art alle Elemente der Fläche entwicklen lassen, daß mithin die ganze Fläche in eine einzige Ebene ausgebreitet oder entwickelt werden kann, ohne zu zerreißen, oder sich zu verdoppeln.

§. 174.

Da nur solche Flächen developpabel oder entwickelbar sind, bei welchen je zwei auf einander folgende Lagen der geraden Erzeugungslinie in einer und derselben Ebene liegen, nämlich parallel sind, oder sich, gehörig verlängert, schneiden, dieses aber von den bisher betrachteten Flächen bei den cylindrischen und konischen der Fall ist, so haben wir nicht nöthig, die entwickelbaren Flächen noch besonders näher zu untersuchen. Weiter unten werden einige Flächen wirklich entwickelt werden. Uebrigens kann man sich die Entwickelung einer Kegelfläche, insoferne man sie als eine Pyramidenfläche von unendlich viel Seitenflächen betrachtet, durch die Entwickelung der Pyramidenfläche in §. 93. anschaulich machen.

Revolutions- oder Umdrehungsflächen.

§. 175.

Eine Curve, welche sich um eine gerade Linie so bewegt, daß jeder ihrer Punkte einen Kreis beschreibt,

dessen Centrum in der Geraden liegt und dessen Ebene senkrecht darauf ist, erzeugt eine Fläche eigner Art, welche Revolutions- oder Umdrehungsfläche heißt. Die Kugelfläche, entstanden durch die Umdrehung eines Halbkreises um seinen Durchmesser, ist z. B. eine solche Fläche. Der Halbkreis ist die Erzeugungscurve, die Gerade die Directionslinie oder Revolutionsachse. Man kann hiernach auch sagen, Revolutionsflächen seien solche, welche durch Ebenen, die senkrecht auf ihren Achsen sind, in Kreisen geschnitten werden.

Da jeder Punkt der Erzeugungscurve einen Kreis beschreibt, der in der erzeugten Fläche liegt, seinen Mittelpunkt in der Achse derselben hat und dessen Ebene senkrecht auf dieser Achse ist; so kann man sich auch vorstellen, die Fläche sei durch eine unendliche Anzahl solcher Kreise gelegt, oder durch einen Kreis erzeugt worden, der sich in senkrechter Lage gegen die Achse, sich selbst parallel bleibend, fortbewegt, dabei sein Centrum in der Achse hat und seinen Halbmesser so ändert, daß jene Erzeugungscurve stets von der Peripherie geschnitten wird.

§. 176.

Wenn gleich im vorigen §. keine ebene Erzeugungscurve vorausgesetzt ist, so kann man doch jede Umdrehungsfläche als durch eine ebene Curve erzeugt betrachten. Um dieses einzusehen, denke man sich die unendlich vielen Halbmesser, welche von allen Punkten einer nicht ebenen Erzeugungscurve auf die Achse gezogen werden können, so weit um diese Achse gedreht, bis sie alle in einer und derselben Ebene liegen; so wird durch ihre Endpunkte eine ebene Curve bestimmt werden, welche bei ihrer Bewegung um die Achse dieselbe Fläche erzeugen würde und offenbar nichts anders

ist, als der Schnitt einer durch die Achse gelegten Ebene mit der Revolutionsfläche. Einen solchen Schnitt nennt man einen Meridian dieser Fläche. In der Folge wird entweder stets ein auf der Achse senkrechter Kreis, oder ein solcher Meridian als Erzeugungslinie einer Revolutionsfläche angenommen. Der mit der Vertikalebene parallele Meridian heißt Hauptmeridian; seine Vertikalprojection ist ihm gleich und kann statt seiner angenommen werden.

§. 177.

Um die Darstellung der Revolutionsflächen möglichst zu vereinfachen, nimmt man gewöhnlich die Projectionsebenen so an, daß die Achsen jener Flächen senkrecht auf der Horizontalebene sind. Dadurch wird der Erzeugungskreis horizontal (§. 175.) und die Ebene der Erzeugungscurve vertikal.

§. 178. Aufgabe.

Nach den Voraussetzungen des vorigen §. seien nun a', a''c'' (Fig. 56.) die Projectionen der Achse, und a'b', a''b''c'' die der Erzeugungscurve einer Umdrehungsfläche. Man soll die Fläche projiciren.

Macht man die Curve a''d''c'' der Curve a''b''c'' gleich, so ist offenbar a''b''c''d''a'' die Contour oder der Umriß der Vertikalprojection der Fläche, und eben so der aus a' mit dem größten Halbmesser a'b' beschriebene Kreis b'b'd' die Contour der Horizontalprojection derselben.

Will man die Erzeugungscurve zur vollständigeren Darstellung der Fläche noch in andern Lagen projiciren, z. B. in der Lage, in welcher a'b' ihre Horizontalprojection ist, so kann dieses sehr leicht geschehen. Denkt man sich den Hauptmeridian in diese Lage um die Achse gedreht, so beschreibt der Punkt b desselben einen Kreisbogen, dessen Vertikalprojection in b''d''

liegt, und dessen Horizontalprojection b'b' ist. Da b' die Horizontalprojection des Punktes b nach der Drehung ist, so ist der Durchschnitt b'' des Perpendikels von b' auf die Basis mit b''d'' die Vertikalprojection des Punktes b. Die Horizontalprojection e' eines andern Punktes e der Erzeugungscurve kommt nach e', und die Vertikalprojection e'' rückt eben so, wie vorhin b'', in der auf a'c' senkrechten e''f'' fort und wird darin in e'' durch das Perpendikel von e' auf die Basis bestimmt. Auch gleiche Weise sucht man die Vertikalprojectionen von noch mehr Punkten und zieht durch sie eine Curve a''b''c'', so ist diese die Vertikalprojection der Erzeugungscurve in der neuen Lage. Auf diese Art können so viele Lagen der Erzeugungscurve projicirt werden, als man will.

§. 179. Zusatz.

Wird die Curve a''b''c'' (Fig. 56.) ein Halbkreis, so erzeugt sie eine Kugelfläche; wird sie eine gerade Linie, die mit der Achse parallel ist, so erzeugt sie eine Cylinderfläche; und schneidet sie endlich als gerade Linie die Achse, so entsteht eine Kegelfläche. Diese Flächen kann man daher auch als Revolutionsflächen ansehen.

§. 180. Aufgabe.

Gesetzt rs (Fig. 56.) wäre in der vorigen Aufgabe die Basis, so würde die Revolutionsfläche von der Vertikalebene geschnitten. Man soll die dadurch entstehende Trace bestimmen.

Der Kreis g'i'h', welcher rs berührt, ist offenbar die Horizontalprojection der zwei Kreise auf der Fläche, welche die Vertikalebene berühren und demnach die Trace oben und unten durch ihre Berührungspunkte i, i begrenzen. Da g''h'', g''h'' die Vertikalprojectionen dieser Kreise sind, so sind die Durchschnitte i'', i'' mit

dem Perpendikel i'i'' diese Grenzpunkte der Trace. Die Horizontalprojection des äußersten Punktes der Trace links ist offenbar k', mithin k'' in der Projection d''b'' des Kreises, wovon d'k'b' die Horizontalprojection ist, die Vertikalprojection dieses Punktes. Andere Punkte der Trace, z. B. denjenigen Punkt, dessen Horizontalprojection l' ist, erhält man, indem man den Punkt l' mit l'a' aus a' auf d'a' in m' führt und von m' ein Perpendikel auf die Basis fällt; die dadurch entstehenden Durchschnitte m'', m'' mit der Curve geben die Höhe der Horizontalkreise an, in welchen l liegt. Die Perpendikel m''n'', m''n'' auf a''c'' sind daher die Vertikalprojectionen dieser Kreise; in ihnen liegen mithin die Vertikalprojectionen des Punktes l, also sind es die Durchschnitte l'', l'' des Perpendikels von l' auf die Basis mit m''n'', m''n''. Indem man einzelne Punkte, wie vorhin l', zwischen k' und i' annimmt, findet man auf gleiche Art noch mehr Punkte der Trace. Die gehörige Verbindung derselben gibt die halbe Trace i''l''k''l''i''; die andere Hälfte ergibt sich eben so, oder durch Uebertragung jener.

§. 181. Aufgabe.

Aus der Horizontalprojection l' (Fig. 56.) eines Punktes l einer Umdrehungsfläche, dessen Vertikalprojection zu finden.

Man verfahre ganz wie im vorigen §. mit dem Punkte l', so erhält man die Punkte l'', l'', woraus folgt, daß es zwei Punkte l auf der Fläche gibt, deren Horizontalprojection l' ist.

Wäre die Vertikalprojection l'' gegeben und die Horizontalprojection l' zu bestimmen, so dürfte man nur das Perpendikel l''l' von l'' auf die Basis fällen, und aus a' mit dem Halbmesser l'a' = m''o'' durch den Punkt l'', durchschneiden. Dadurch wird der Punkt l'

erhalten. Da aber jenes Perpendikel l′′l′ auch diesseits d′b′ vom Kreise mit l′a′ = m′′o′′ geschnitten wird, so gibt es zwei Punkte, die ihre Vertikalprojection in l′′ haben.

Aus der einen Projection einer in einer Umdrehungsfläche liegenden Linie deren andere Projection zu bestimmen?

§. 182.

Aus dem Bisherigen dieses Abschnittes geht deutlich hervor, daß es bei der Darstellung einer krummen Fläche vorzüglich darauf ankommt, diejenige Entstehungsart derselben aufzufinden, bei welcher sich die Projectionen der Erzeugungslinie in ihren verschiedenen Lagen möglichst leicht bestimmen lassen.

Siebenter Abschnitt.

Von den tangirenden Ebenen an krummen Flächen.

§. 183.

Gleich wie man sich jede Curve aus unendlich vielen, unendlich kleinen geraden Linien oder Elementen zusammengesetzt denken kann, so kann man sich auch vorstellen, eine krumme Fläche bestehe aus einer unendlichen Menge, unendlich kleiner Ebenen, deren jede ein Element der krummen Fläche ist. Denkt man sich nun ein solches Element nach allen Richtungen erweitert, so entsteht eine Ebene, welche dieses Element mit der krummen Fläche gemein hat. Diese Ebene heißt tangirende Ebene an der krummen Fläche und das beiden gemeinschaftliche Element das Berührungselement oder der Berührungspunkt derselben.

§. 184.

Die Lage einer tangirenden Ebene an einer krummen Fläche ist durch den Berührungspunkt oder das Berührungselement ganz bestimmt. Um dieses einzusehen, denke man sich, es gingen durch den Berührungspunkt irgend zwei in der Fläche liegende Curven, z. B. zwei verschiedene Erzeugungslinien, oder eine Erzeugungslinie in verschiedenen Lagen, so sind diejenigen Theile dieser zwei Curven, welche in dem Berührungselement der Fläche liegen, Elemente der Curven; sie werden, verlängert, zu Tangenten daran (§. 112.), und fallen offenbar in die Erweiterungen des Berührungselementes, d. h. in die tangirende Ebene. Eine tangirende Ebene ist daher durch die Tangenten bestimmt, welche man an zwei, durch den Berührungspunkt geführte Erzeugungslinien in diesem Punkte ziehen kann. Hieraus folgt zugleich die Methode, wie eine tangirende Ebene durch einen Punkt einer krummen Fläche an diese gelegt wird, und obgleich diese Methode allgemein ist, so läßt sich doch, wie wir bald sehen werden, zuweilen ein kürzeres Verfahren anwenden.

Die Gerade, welche im Berührungspunkte senkrecht auf einer tangirenden Ebene ist, heißt Normallinie oder Normale der krummen Fläche, und jede durch sie gelegte Ebene heißt Normalebene. Der Durchschnitt einer solchen Ebene mit der krummen Fläche heißt Normalschnitt.

§. 185.

Wenn eine Ebene tangirend an eine krumme Fläche gelegt werden soll, so können folgende Fälle vorkommen: 1) Der Berührungspunkt ist gegeben. 2) Die Ebene soll durch einen außerhalb der krummen Fläche gegebenen Punkt gehen. 3) Sie soll mit einer Gera-

den parallel und 4) durch eine Gerade tangirend an die krumme Fläche geführt werden. Endlich kann es noch vorkommen, daß eine Ebene an mehrere krumme Flächen zugleich tangirend zu legen ist. Es sollen nun diese Fälle nach einander durch Beispiele an den bekanntesten krummen Flächen näher ausgeführt werden.

Erster Fall. Der Berührungspunkt ist gegeben.

§. 186. Aufgabe.

Durch den Punkt i', i'' (Fig. 57.) einer cylindrischen Fläche a'c'e'f', b''d''h''g'' von beliebiger Basis eine tangirende Ebene an diese Fläche zu legen.

Man ziehe durch den Punkt i', i'' die gerade Erzeugungslinie i'k', i''k''. Da diese Linie mit der zu legenden Ebene den Punkt i', i'' gemein hat, ohne die Ebene zu schneiden, so muß sie ganz in der Ebene liegen, und daher ihr Durchschnitt k' mit der Horizontalebene ein Punkt der Horizontaltrace der tangirenden Ebene sein. Da ferner diese Trace mit der Trace a'b'c'd' der Fläche in einer Ebene liegt, den Punkt k' mit ihr gemein hat, und sie nicht schneiden darf, weil sonst auch die Fläche von der Ebene geschnitten werden würde; so muß diese Trace Tangente an der Trace a'b'c'd' der cylindrischen Fläche sein. Zieht man daher durch k' die Tangente k'm an a'b'c'd', so ist sie die Horizontaltrace der tangirenden Ebene und m ein Punkt der Vertikaltrace. Läßt sich der Durchschnitt der Linie i'k', i''k'' mit der Vertikalebene, als ein zweiter Punkt der Trace in dieser Ebene, wegen Mangel an Raum nicht bestimmen, so führe man durch irgend einen Punkt i', i'' der Ebene, in ihr eine Horizontallinie i'l', i''l'', indem man i'l' parallel mit k'm und i''l'' parallel mit md'' zieht (§. 57.); der Durchschnitt l'' derselben mit der Vertikalebene ist nun auch ein Punkt der Vertikal-

trace der tangirenden Ebene, und mithin ml″ diese Trace selbst.

Diese Horizontallinie ist offenbar nichts anders als die Tangente an der Erzeugungslinie a′b′c′d′ der Fläche in ihrer Lage durch den Punkt i′, i″. Die Tangente an der andern Erzeugungslinie, nämlich an i′k′, i″k″, fällt mit dieser Linie zusammen, und man sieht daher, daß die allgemeine Methode (§. 184.) hier wirklich angewendet worden ist.

Wir sehen aus dieser Auflösung, daß, **wenn eine cylindrische Fläche und eine sie berührende Ebene von einer Ebene geschnitten werden, der Durchschnitt mit der Ebene Tangente an dem Durchschnitt mit der krummen Fläche ist.** Es ist nämlich hier die Trace der tangirenden Ebene Tangente an der Trace der cylindrischen Fläche.

Anmerkung. Man wird sich aus §. 164. erinnern, daß man nur die eine Projection des Punktes i willkührlich annehmen kann.

§. 187. Aufgabe.

Durch einen Punkt i′, i″ (Fig. 58.) einer konischen Fläche eine tangirende Ebene an diese Fläche zu führen.

Man sieht leicht ein, daß auch hier die durch i gehende Erzeugungslinie i′k′, i″k″ ganz in der tangirenden Ebene liegt, und daß die Trace dieser Ebene Tangente an der Trace der konischen Fläche ist. Man verfährt daher ganz wie im vorigen §.

§. 188. Aufgabe.

Durch einen Punkt a′, a″ (Fig. 59.) einer Revolutionsfläche, z. B. einer Kugelfläche, eine tangirende Ebene an diese Fläche zu legen; c′, c″ ist das Centrum der Kugel.

Der Kreis a′b′d′, mit c′a′ aus c′ beschrieben, ist die Horizontalprojection des horizontalen Erzeugungskreises durch a, und die mit der Basis parallele Linie b″d″ durch a″ seine Vertikalprojection. Da die Projectionen der Tangenten an einer Curve, tangirend an den Projectionen der Curve sind (§. 113.), so ist die Tangente am Kreis abd horizontal, und a′e′, Tangente an a′b′d′, und a″e″ sind ihre Projectionen. Ihr Durchschnitt e″ mit der Vertikalebene ist ein Punkt der Vertikaltrace der gesuchten Ebene (§. 184.).

Ein vertikaler größter Kreis durch a sei die zweite Erzeugungslinie der Kugelfläche. Seine Horizontalprojection ist der Durchmesser f′g′. Denken wir uns diesen Kreis sammt der Tangente im Punkt a an ihm, um seinen vertikalen Durchmesser so weit gedreht, bis er mit der Vertikalebene parallel ist, so sind d′h′, d″b″h″ seine Projectionen in dieser Lage; die Projectionen von a sind nun b′, b″ und die Tangente b″i″ in b″ an d″b″h″ ist die Vertikalprojection der Tangente. Da die Horizontalprojection dieser Tangente in d′h′ liegt, so ist i′ der Durchschnitt der Tangente mit der Horizontalebene. Wird nun der vertikale Erzeugungskreis mit der Tangente wieder in seine erste Lage c′k durch a′ zurückgedreht; so beschreibt die Tangente in der Horizontalebene den Bogen i′k, beschrieben aus c′ mit c′i′, und k ist der wahre Durchschnitt der Tangente mit der Horizontalebene, folglich ein Punkt der Horizontaltrace der tangirenden Ebene. Da diese Trace kl, gleich der Tangente ae, eine Horizontallinie in der gesuchten Ebene ist, so ist sie mit a′e′ parallel und gibt in l einen zweiten Punkt der Vertikaltrace le″, welche mithin gezogen werden kann.

Auf gleiche Weise wird bei jeder andern Umwälzungsfläche verfahren. An die Kugelfläche kann man

jedoch auch dadurch eine tangirende Ebene führen, daß man nach §. 66. den zum Berührungspunkt gehörigen Halbmesser in seinem Ende mittelst einer Ebene senkrecht durchschneidet, welche dann die gesuchte Ebene ist.

§. 189. Zusatz.

Die Tangente ae (Fig. 59.) liegt in der Ebene des Kreises abd und ist senkrecht auf dem Durchmesser, in welchem der Kreis abd die Ebene des vertikalen Kreises, oder überhaupt bei der Revolutionsfläche die Meridianebene schneidet, mithin ist sie auch senkrecht auf dieser Ebene. Da nun die tangirende Ebene durch diese Tangente gelegt ist, so schneidet sie die Meridianebene senkrecht und geht durch die Tangente am Meridian. Soll daher an einen Punkt einer Revolutionsfläche eine tangirende Ebene geführt werden, so kann man auch in diesem Punkt eine Tangente an den durch ihn gehenden Meridian ziehen, und durch sie eine senkrechte Ebene auf die Ebene dieses Meridians legen; diese Ebene ist alsdann die verlangte tangirende Ebene.

Zweiter Fall. Die tangirende Ebene soll durch einen außerhalb der krummen Fläche liegenden Punkt geführt werden.

§. 190. Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Cylinderfläche liegenden Punkt n′, n″ (Fig. 57.) eine tangirende Ebene an diese Fläche zu führen.

Da jede tangirende Ebene an einer Cylinderfläche diese Fläche in einer Seite berührt (§. 186.), so liegt eine parallele Linie n′o′, n″o″ durch den gegebenen Punkt mit der Erzeugungslinie i′k′, i″k″ ganz in der zu legenden tangirenden Ebene. Der Durchschnitt o′ von no mit der Horizontalebene ist daher ein Punkt

der Horizontaltrace, und ihr Durchschnitt l'' mit der Vertikalebene ein Punkt der Vertikaltrace. Da nun ferner die Horizontaltrace der tangirenden Ebene Tangente an der Horizontaltrace der Cylinderfläche ist (§. 186.); so kann sie durch den Punkt o' gezogen werden und ein zweiter Punkt m der Vertikaltrace wird zugleich durch sie bestimmt.

Da man von o' noch eine Tangente an a'b'c'd' ziehen kann, so kann man auch durch den gegebenen Punkt noch eine tangirende Ebene an die Cylinderfläche führen.

§. 191. Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Kegelfläche liegenden Punkt n', n'' (Fig. 58.) eine tangirende Ebene an diese Fläche zu führen.

Da die tangirende Ebene den Kegel in einer Seite berührt, jede Seite aber durch die Spitze s', s'' geht, so muß auch die Ebene durch s', s'' gehen. Nun geht sie aber auch durch den Punkt n', n'', mithin durch die Linie n's', n''s'', und der Durchschnitt o' dieser Linie mit der Horizontalebene ist ein Punkt ihrer Horizontaltrace. Diese ist Tangente an der Trace der Kegelfläche (§. 187.), und kann daher gezogen werden. Sie gibt den Punkt m der Vertikaltrace; ein anderer Punkt derselben ist der Durchschnitt p'' der Linie n's', n''s'' mit der Vertikalebene.

Auch hier können zwei tangirende Ebenen durch den gegebenen Punkt gelegt werden.

§. 192. Aufgabe.

Durch einen außerhalb einer Revolutionsfläche liegenden Punkt eine tangirende Ebene an diese Fläche zu legen.

Man denke sich den gegebenen Punkt als die Spitze einer konischen Fläche, welche die gegebene Revolutions-

fläche umhüllt und berührt. Jede der unzählich vielen Ebenen, welche tangirend an diese konische Umhüllungsfläche gelegt werden können, berührt auch die Revolutionsfläche und geht durch die Spitze der Umhüllungsfläche, d. i. durch den gegebenen Punkt. Jeder Punkt der Berührungscurve der Umhüllungsfläche kann also als gesuchter Berührungspunkt der zu legenden Ebene angesehen werden und jede Ebene, welche nun nach §. 188. durch einen solchen Punkt tangirend an die krumme Fläche gelegt wird, geht auch durch den gegebenen Punkt; es gibt daher unendlich viele Ebenen, welche der Aufgabe genügen. Es kommt nun darauf an, die erwähnte Berührungscurve zu bestimmen und dieß soll im folgenden §. geschehen.

§. 193. Aufgabe.

Man soll die Curve bestimmen, in welcher eine konische Umhüllungsfläche, deren Spitze h′, h″ (Fig. 60.) ist, die Revolutionsfläche a′b′d′, e″f″g″ berührt. Die Achse c′, c″e″ dieser Fläche ist vertikal.

Die konische Umhüllungsfläche wird durch eine Gerade erzeugt, welche durch den Punkt h′, h″ geht und während ihrer Bewegung die Revolutionsfläche beständig berührt. Alle diese Berührungspunkte bilden, gehörig verbunden, die gesuchte Berührungscurve. Diese Punkte müssen nun bestimmt und entsprechend mit einander verbunden werden. Unter ihnen gibt es einige, deren Bestimmung einfach und leicht ist; sie sollen deshalb zuerst vorgenommen werden.

Die Tangenten h′a′, h′b′ an a′b′d′ sind offenbar die Tracen der durch h an die Revolutionsfläche gelegten tangirenden Vertikalebenen, und die Berührungspunkte a′, b′ die Horizontalprojectionen ihrer Berührungspunkte mit der Fläche. Die Vertikalprojectionen

a'', b'' liegen offenbar in der Vertikalprojection a''b'' des größten Kreises abd. Eben so sind die Tangenten h''f'', h''g'' an e''f''g'' die Tracen derjenigen durch h an die krumme Fläche gelegten tangirenden Ebenen, welche auf der Vertikalebene senkrecht sind, und f'', g'' sind die Projectionen der Berührungspunkte dieser Ebenen. Es ist nun der mit der Basis parallele Durchmesser g'u' die Horizontalprojection des Meridians efg, mithin liegen die Horizontalprojectionen der Berührungspunkte f, g darin, und werden leicht in f', g' bestimmt. Da nun die Berührungspunkte solcher, durch h gelegten, tangirenden Ebenen offenbar auch zugleich Berührungspunkte der die Umhüllungsfläche erzeugenden Geraden sind, so haben wir jetzt vier solcher Berührungspunkte, nämlich a, b, f, g durch ihre Projectionen.

Denkt man sich eine Reihe vertikaler Ebenen durch h und die Revolutionsfläche schneidend gelegt, so wird man leicht begreifen, daß unter allen so entstehenden Schnitten derjenige am größten ist, der h'd' zur Trace hat, oder durch die Achse gelegt ist, und daß der eine seiner Durchschnitte mit der gesuchten Berührungscurve der höchste, der andere aber der niedrigste Punkt dieser Curve ist. Diese Grenzpunkte findet man auf folgende Art. Man drehe den Plan durch h'c' in die mit der Vertikalebene parallele Lage i'g', so kommt h' nach i', h'' nach dem Punkte i'' der Horizontallinie h''i'', welche die Vertikalprojection des Bogens hi ist. Nun ist e''f''g'' die Vertikalprojection des Meridians durch d'k, und die Tangenten i''l'', i''m'' an e''f''g'' geben die Berührungspunkte l'', m'', deren Horizontalprojectionen die Punkte l', m' in dieser Lage des Meridians sind. Wird nun der Meridian in seine

vorige Lage zurückgeführt, so kommt l′ nach n′, m′ nach o′, und dieß sind die Horizontalprojectionen der wahren Berührungspunkte, welche im Meridian d′k liegen; die Vertikalprojectionen l″, m″ rücken bei dieser letzten Drehung in den auf c″e″ Senkrechten l″n″, m″o″ fort und werden in n″, o″ durch Perpendikel von n′, o′ auf die Basis bestimmt. Durch diese Punkte werden die Grenzen der Projectionen der Berührungspunkte in Bezug auf die Höhe über der Horizontalebene angegeben.

Die bis jetzt gefundenen sechs Punkte bezeichnen gewöhnlich schon die Form der Berührungscurve im Allgemeinen.

Um noch andere Punkte der Curve zu bestimmen, verfährt man auf folgende Art. Gesetzt es sollten diejenigen Punkte der Berührungscurve gefunden werden, welche in dem Meridian p′q′ liegen. Man hat so eben die einem Meridian g′u′, g″u″ zugehörigen Berührungspunkte dadurch gefunden, daß man von der Projection des gegebenen Punktes h′, h″ auf der Ebene jenes Meridians oder auf einer mit ihr parallelen Vertikalebene Tangenten an die Projection des Meridians auf der nämlichen Ebene zog. Gerade so verfahre man bei jedem andern Meridian wie p′q′. Man projicire also den Punkt h auf die Ebene dieses Meridians und ziehe von dieser Projection Tangenten an den Meridian. Um aber diesen Meridian zu erhalten, dreht man seine Ebene sammt dem darauf projicirten Punkt h um die Achse, bis sie mit der Vertikalebene parallel ist. Nach diesen Andeutungen wird nun auf folgende Weise verfahren. Man fällt eine Senkrechte h′r′, h″r″ auf den Meridianplan und erhält dadurch die Projection r′, r″ des Punktes h auf dieser Ebene

(§. 63.). Nun führt man den Meridian in die Lage g′u′, parallel mit der Vertikalebene, wodurch r′ nach s′ und r″ nach s″ kommt. Die Tangenten s″t″, s″u″ geben die Berührungspunkte t″, u″, aus denen t′, u′ in g′u′ folgen. Werden diese Punkte in den Meridian p′q′ zurückgeführt, so ergeben sich die Horizontalprojectionen p′, q′ der gesuchten Berührungspunkte; die Vertikalprojectionen p″, q″ bestimmt man leicht in den von t″, u″ auf c″e″ gefällten Senkrechten. Auf diese Art müssen so viele Punkte gesucht werden, als nöthig sind; durch ihre Verbindung in jeder Projectionsebene entstehen die Projectionen a′g′o′b′p′f′n′q′, a″g″o″b″p″f″n″q″ der gesuchten Berührungscurve.

Was die Ausführung der Zeichnung betrifft, so sieht man leicht ein, daß der unterhalb des größten Kreises adb liegende Theil der Curve nicht von oben, und der jenseits des Hauptmeridians liegende Theil nicht von vornen sichtbar ist. Die Projectionen jenes Theils sind a′o′b′, a″o″b″, die Projectionen dieses Theils g′a′f′, g″a″f″.

Anmerkung. Lassen sich keine Tangenten vom Punkt r an den Meridian ziehen, so zeigt dieß an, daß die gesuchte Berührungscurve keinen Punkt in dem betreffenden Meridian hat. Dieß ist z. B. der Fall, wenn der gegebene Punkt h seitwärts ziemlich nahe an der Revolutionsfläche liegt; hier fallen nämlich Punkte wie r″ innerhalb der Vertikalprojection des Meridians.

§. 194. Zusatz.

Bei der Kugelfläche kann man die Berührungscurve einer konischen Umhüllungsfläche etwas leichter bestimmen, weil die Durchschnitte einer Kugelfläche mit einer Ebene Kreise sind. Es habe z. B. die konische Umhüllungsfläche der Kugel a′b′c′, c″d″e″ (Fig. 61.)

ihre Spitze in f′, f″. Die Projectionen der vier Punkte a, b, c, d der Berührungscurve bestimme man ganz wie die der vier ersten Punkte im vorigen §. In Bezug auf andere Punkte lege man eine Reihe vertikaler Ebenen durch f, welche die Kugelfläche schneiden; an die so entstehenden Kreise ziehe man von f Tangenten, so sind ihre Berührungspunkte Punkte der gesuchten Berührungscurve. Die Projectionen solcher Berührungspunkte werden auf folgende Art construirt. Es sei f′g die Trace einer der erwähnten Vertikalebenen; man lege sie sammt dem Punkte f in die Horizontalebene um. Der Mittelpunkt des Schnitts liegt in gleicher Höhe mit dem Mittelpunkt h der Kugel, weil das von h auf die Vertikalebene des Schnitts gefällte und jenen Mittelpunkt des Schnitts bestimmende Perpendikel horizontal ist; gl ist die wahre Größe des Durchmessers vom Schnitt. Man mache daher km in der Mitte von gl darauf senkrecht und gleich h″i, und beschreibe aus m mit kl den Kreis no, so ist er der um f′g umgelegte Schnitt. Von dem nach p umgelegten Punkte f ziehe man an no Tangenten und stelle den Kreis wieder auf, so bestimmen die Senkrechten nn′, oo′ auf f′g die wahren Projectionen n′, o′ der Berührungspunkte von Tangenten, welche von f in der Ebene ff′g an die Kugelfläche gezogen werden können, und nn′, oo′ sind die wahren Höhen der Berührungspunkte über der Horizontalebene. Macht man daher, in den von n′, o′ auf die Basis gezogenen Senkrechten, n″q = nn′, o″r = oo′, so sind n″, o″ die Vertikalprojectionen jener Berührungspunkte. Auf gleiche Art werden deren noch mehr gesucht und gehörig mit einander verbunden.

Da hier die Berührungscurve ein Kreis ist, dessen Ebene die Gerade vom Punkt f nach dem Mittelpunkt

der Kugel senkrecht schneidet, so erhält man sie auch, indem man durch einen Berührungspunkt, z. B. durch d, eine Ebene senkrecht auf jene Gerade legt (§. 66.) und ihren Durchschnitt mit der Kugel nach §. 217. projicirt.

§. 195. Zusatz.

Die erste der so eben bei der Kugelfläche, zur Bestimmung ihrer Berührungscurve mit einer sie umhüllenden konischen Fläche, beschriebenen Verfahrungsarten, läßt sich überhaupt bei allen Revolutionsflächen anwenden. Wenn aber die Schnitte der sie schneidenden Vertikalebenen keine Kreise sind, so muß bei der Umlegung, oder bei der Projicirung eines jeden Schnittes, jeder seiner Punkte besonders construirt werden, oder wenigstens so viele Punkte, als nöthig sind, um einen Bogen zu erhalten, an welchen Tangenten gezogen werden können. Dadurch wird aber das Verfahren sehr weitläufig und mühsam.

Dritter Fall. Die tangirende Ebene soll mit einer gegebenen Geraden parallel gelegt werden.

§. 196.

An die Cylinderfläche a′b′c′f′e′, b″d″g″h″ (Fig. 57.) soll eine tangirende Ebene gelegt werden, welche mit der Linie p′q′, p″q″ parallel ist.

Man lege durch die Linie pq eine Hülfsebene p′rq″ parallel mit der Erzeugungslinie der Cylinderfläche, indem man durch irgend einen Punkt s′, s″ der Linie pq mit der Erzeugungslinie eine Parallellinie s′t′, s″t″ zieht, und durch sie und pq die Ebene p′rq″ legt (§. 74.). Die Tracen dieser Ebene sind durch die Durchschnitte p′, t′ der Linien pq und st mit der horizontalen Projectionsebene und den Durchschnitt q″ einer derselben mit der vertikalen Projectionsebene bestimmt worden.

Die zu legende tangirende Ebene muß nun mit dieser Hülfsebene parallel sein, weil sie dann auch mit der darin liegenden Linie pq parallel ist; die gesuchten Tracen müssen daher mit den Tracen p'r, rq'' der Hülfsebene parallel sein, und da überdieß die zu bestimmende Horizontaltrace Tangente an der Trace a'c'b' der Cylinderfläche sein muß (§. 186.), so wird sie erhalten, wenn man eine mit p'r parallele Tangente k'm an a'c'b' zieht (§. 122.). ml'', parallel mit rq'', ist nun die gesuchte Vertikaltrace, also k'ml'' die verlangte Ebene. k'i', k''i'' ist die Seite der Cylinderfläche, in welcher sie berührt wird. Man sieht, daß noch eine tangirende Ebene auf der andern Seite der Cylinderfläche gelegt werden kann.

Ist die gegebene Gerade mit der geraden Erzeugungslinie der Cylinderfläche parallel, so entspricht jede tangirende Ebene an der Cylinderfläche und es gibt daher unendlich viele.

§. 197. Aufgabe.

An die Kegelfläche a'b's', a''d''s'' (Fig. 58.) soll eine tangirende Ebene gelegt werden, die mit der Linie d'e', d''e'' parallel ist.

Die gesuchte Ebene geht offenbar durch eine mit d'e', d''e'' parallele Linie s'f', s''f'' durch die Spitze s', s'', und der Durchschnitt f' dieser Linie mit der Horizontalebene ist ein Punkt der gesuchten Horizontaltrace. Da diese Trace die Trace a'k'b' berührt, so ziehe man von f' eine Tangente f'k' an a'k'b'; sie ist die Horizontaltrace der gesuchten Ebene und m ein Punkt der Vertikaltrace. Nun suche man noch einen Punkt dieser Trace, z. B. den Durchschnitt p'' einer in der tangirenden Ebene liegenden, beliebigen Linie s'o', s''o'' mit der Vertikalebene. k'mp'' ist nun die verlangte Ebene. In s'k', s''k'' wird die Kegelfläche berührt.

Auch hier kann, wie leicht einzusehen ist, noch eine Ebene der Aufgabe entsprechend geführt werden.

§. 198. Aufgabe.

An eine Revolutionsfläche eine tangirende Ebene so zu legen, daß sie mit einer Geraden parallel ist.

Denkt man sich eine mit der gegebenen Linie parallele und die Revolutionsfläche berührende Gerade, welche sich so bewegt, daß sie mit der gegebenen Geraden immer parallel bleibt und die krumme Fläche stets berührt, so erzeugt sie eine diese Fläche umhüllende cylindrische Fläche, und ihre auf einander folgenden Berührungspunkte bestimmen die Berührungscurve dieser Umhüllungsfläche mit der Revolutionsfläche. Jede Ebene, welche nun an dieser cylindrischen Fläche tangirend ist, ist es auch an der Revolutionsfläche, und ist zugleich mit der gegebenen Geraden parallel; denn die Seite der cylindrischen Fläche, in welcher die Berührung statt findet, ist mit dieser Geraden parallel, folglich ist es auch die Gerade mit der Ebene. Es kommt daher blos darauf an, die Berührungscurve zu bestimmen; dieß soll nun geschehen.

§. 199. Aufgabe.

Die Berührungscurve einer cylindrischen Fläche zu bestimmen, welche eine Revolutionsfläche umhüllt und berührt.

Was die Kugelfläche betrifft, so wird man leicht einsehen, daß die gesuchte Berührungscurve derjenige größte Kreis der Kugelfläche ist, dessen Ebene die gerade Erzeugungslinie der cylindrischen Fläche senkrecht schneidet. Man darf daher nur durch das Centrum der Kugelfläche eine Ebene senkrecht auf jene Linie führen und den dadurch bestimmten Kreis in dieser Lage projiciren (§. 66. 80. 81.).

In Bezug auf die Bestimmung der Berührungscurve der cylindrischen Umhüllungsfläche mit einer andern Revolutionsfläche, verhält es sich aber auf eine dem Verfahren in §. 193. sehr ähnliche Art. Es sei (Fig. 62.) a′b′c′, a″e″c″f″ die Revolutionsfläche; d′, e″f″ ihre Achse und g′h′, g″h″ die Gerade, mit welcher alle Seiten der Umhüllungsfläche parallel sein sollen.

Da diese Fläche durch die Bewegung einer an der krummen Fläche tangirenden und mit der Linie gh stets parallel bleibenden Geraden erzeugt wird, deren Berührungspunkte Punkte der gesuchten Curve sind, so sind die mit g′h′ parallelen Tangenten b′l, i′k an a′b′c′ die Projectionen zweier Lagen dieser Geraden, und die Punkte b′, i′ sind die Horizontalprojectionen der Berührungspunkte der Linie in diesen Lagen. Die Vertikalprojectionen b″, i″ liegen offenbar in der Vertikalprojection a″c″ des Kreises, dessen Horizontalprojection a′b′c′ ist. Eben so sind die mit g″h″ parallelen Tangenten m″p, n″o an a″e″c″f″ die Vertikalprojectionen zweier Lagen jener Geraden, und die Punkte m″, n″ sind die Vertikalprojectionen der zugehörigen Berührungspunkte. Ihre andern Projectionen m′, n′, in der Horizontalprojection a′c′ des Hauptmeridian liegend, werden leicht erhalten.

Man hat also die in einem Meridian liegenden zwei Punkte m, n der Berührungscurve dadurch erhalten, daß man an die Projection des Meridians auf einer mit ihm parallelen Vertikalebene Tangenten zog, die mit der Projection der Geraden auf dieser Vertikalebene parallel waren. Ganz auf dieselbe Art findet man noch mehr Punkte, wenn man mit einem andern Meridian eben so verfährt. Man muß nämlich, um die in einem Meridian liegenden Punkte der Curve zu

erhalten, die Gerade und den Meridian auf eine, mit diesem parallele Ebene projieiren, und hier an die Projection des Meridians Tangenten ziehen, die mit jener Projection der Geraden parallel sind. Weil aber die Projicirung solcher Meridiane sehr mühsam ist, so schlägt man folgenden Weg ein.

Man projicire die gegebene Gerade g'h', g''h'' auf eine Meridianebene, z. B. auf q'r', indem man von irgend zwei Punkten g, h derselben Perpendikel auf diese Ebene, also von g', h' Senkrechte g's', h't' auf q'r' und die Parallelen g''s'', h''t'' mit der Basis zieht; vertikal über s' und t' liegen nun die Projectionen der Punkte g, h im Plan durch q'r'. Dadurch werden die Vertikalprojectionen s'', t'' der Durchschnitte jener Perpendikel mit dem Plan q'r', und mithin die Vertikalprojection s''t'' der Projection der Geraden auf dem Plane q'r' erhalten. Damit müssen, nach dem oben Gesagten, parallele Tangenten an den Meridian q'r' gezogen werden. Zu dem Ende führe man die Vertikalebene durch q'r' in die Lage a'c', parallel mit der vertikalen Projectionsebene; hierdurch kommt s', s'' nach u', u'', t', t'' nach v', v'' und u''v'' ist die Projection von gh nach dieser Drehung. In dieser Lage ist auch a''n''c''m'' zugleich die Projection des Meridians q'r'. Nun ziehe man mit u''v'' parallele Tangenten w''y, x''z an a''n''c''m'', führe die Berührungspunkte w'', x'' nach w', x' auf a'c', und von da, durch Zurückdrehung der Meridianebene in ihre erste Lage q'r', in q' und r', so sind diese Punkte die wahren Projectionen der gesuchten Berührungspunkte. Ihre Vertikalprojectionen q'', r'' ergeben sich nun leicht in den Senkrechten, welche von w'', x'' auf e''f'' gezogen werden. Auf dieselbe Art sucht man noch mehr Punkte der Berührungscurve und verbindet sie gehörig

mit einander. Der höchste und der tiefste Punkt liegen in dem mit hg parallelen Meridian. Man wird leicht unterscheiden, welche Theile der Berührungscurve sichtbar sind, oder nicht, und wie demnach die Projectionen i′m′b′n′, i″m″b″n″ scharf gezogen, oder punktirt werden müssen.

Anmerkung. Anfänger können sich einmal die Frage vorlegen, ob die Revolutionsfläche von der Linie gh geschnitten wird.

Vierter Fall. Die tangirende Ebene soll durch eine gegebene Gerade gelegt werden.

200. Aufgabe.

Durch eine gegebene Gerade eine tangirende Ebene an eine cylindrische, oder konische Fläche zu legen.

Da diese Flächen von tangirenden Ebenen in geraden Linien berührt werden, so kann eine solche Ebene nicht noch zugleich durch eine andere beliebige Gerade gehen, d. h. es kann nicht durch jede Gerade eine tangirende Ebene an eine cylindrische oder conische Fläche gelegt werden. Ob es aber in einem gegebenen Falle möglich ist, sieht man leicht auf folgende Art. Der Durchschnitt der gegebenen Geraden mit der Horizontalebene ist offenbar ein Punkt der gesuchten Horizontaltrace, und da diese an der Trace der krummen Fläche Tangente ist, so kann sie leicht durch jenen Durchschnitt gezogen werden. Der sich ergebende Berührungspunkt ist ein Punkt der Geraden, in welcher die krumme Fläche von einer Ebene berührt werden kann, die jene Tangente zur Trace hat. Diese Gerade ist nun bei der cylindrischen Fläche mit der Erzeugungslinie parallel, und bei der konischen Fläche geht sie nach deren Spitze; sie kann demnach gezogen werden. Liegt sie nun mit der gegebenen Geraden in einer und derselben Ebene, d. h. schneidet sie die gege-

bene Gerade, oder ist sie parallel mit ihr, so ist die durch beide Linien bestimmte Ebene die Gesuchte; im andern Fall kann keine tangirende Ebene durch die gegebene Gerade an die cylindrische, oder konische Fläche gelegt werden.

§. 201. Aufgabe.

Durch eine Gerade eine tangirende Ebene an eine Revolutionsfläche zu legen.

Man nehme zwei beliebige Punkte der Geraden als Spitzen zweier konischen Flächen an, welche beide die Revolutionsfläche umhüllen und berühren. Die Durchschnitte ihrer, nach §. 193. bestimmten Berührungscurven sind die gesuchten Berührungspunkte der tangirenden Ebene, wie man leicht einsieht. Legt man daher durch die gegebene Linie und einen solchen Punkt eine Ebene, so ist sie die verlangte, denn sie geht durch die Spitzen beider konischen Flächen, also durch die Gerade, weil sie an jeder Fläche tangirend ist.

Es ist leicht begreiflich, daß so viel tangirende Ebenen an die krumme Fläche gelegt werden können, als es Durchschnittspunkte der zwei Berührungscurven gibt.

§. 202. Zusatz.

Bei der Kugelfläche kann man folgenden einfacheren Weg einschlagen. Man führe durch das Centrum derselben eine Ebene senkrecht auf die Linie, so wird diese in einem Punkt und die Kugelfläche in einem größten Kreise geschnitten. Von jenem Punkte ziehe man an diesen Kreis eine Tangente und lege durch sie und die gegebene Linie eine Ebene, so ist diese tangirend an der Kugelfläche. Man überzeugt sich hiervon auf folgende Art. Die tangirende Ebene ist auf der schneidenden Ebene senkrecht, weil sie durch eine auf dieser senkrechte Linie, nämlich durch die gegebene, auf sie gelegt ist. Nun ist der Halbmesser des Berüh-

rungspunktes senkrecht auf dem Durchschnitt beider Ebenen, d. i. auf der Tangente am Schnitt, und liegt in der einen Ebene, mithin ist er senkrecht auf der andern, also ist diese tangirend.

Die gerade Linie sei a′b′, a″b″ (Fig. 63.), die Kugelfläche A′, A″. Man lege nach §. 66. durch das Centrum c′, c″ die erwähnte Ebene b′db″ senkrecht auf a′b′, a″b″ und bestimme ihren Durchschnitt e′, e″ mit derselben nach §. 55. Damit man nun die Berührungspunkte der Tangenten finden kann, welche von diesem Punkt an den Schnitt oder Kreis gezogen werden sollen, drehe man die schneidende Ebene um die in ihr liegende und durch c gehende Horizontallinie c′f′, c″f″ bis sie horizontal ist. Dann ist A′ die Projection des Schnitts. Der Punkt e dreht sich dabei um ef mit einem Halbmesser, welcher der Hypotenuse eines rechtwinkeligen Dreiecks gleich ist, dessen Catheten e′f′ und die Senkrechte e″g auf c″f″ sind. Macht man also f′h = e″g und f′i = e′h, so ist i der in die Horizontalebene durch c umgelegte Durchschnittspunkt e. Nun ziehe man die Tangenten ik, il auf deren Berührungspunkte k, l es ankommt. Damit aber diese Punkte in ihrer ursprünglichen Lage erhalten werden, drehe man die Ebene wieder zurück. Da die Durchschnitte m′, m″ n′, n″ der Tangenten mit der Achse c′n′, c″n″ bei der Drehung unverändert bleiben, so gehen auch nach dieser Drehung die Tangenten noch durch sie, und da sie ferner auch durch den wieder nach e′, e″ gekommenen Durchschnitt e der Ebene und der Linie gehen, so können sie durch diese Punkte gezogen werden. Sie geben mit den Perpendikeln von k und l auf die Achse, in welchen die Projectionen der Berührungspunkte bei der Drehung fortrücken, die wahren Projectionen k′, l′ der gesuchten Berührungspunkte. Die Vertikalprojec-

tionen k'', l'' ergeben sich leicht mit den Vertikalprojectionen e''k'', e''l'' durch e'' und m'', n'' der Tangenten. Legt man nun durch diese Punkte und a'b', a''b'' nach §. 41. Ebenen, so sind sie die gesuchten tangirenden Ebenen an der Kugelfläche. Es sind in der Figur die Durchschnitte o, p der Linien ab und el mit der Vertikalebene und der Durchschnitt a' von ab mit der Horizontalebene gesucht und dadurch die Tracen a'q, qp bestimmt worden. Die andere Ebene wird leicht durch die Durchschnitte der Linien ab und ek mit der horizontalen und den Durchschnitt von ab mit der vertikalen Projectionsebene erhalten.

Fünfter Fall. Die tangirende Ebene soll an mehrere krumme Flächen gelegt werden.

§. 203. Aufgabe.

An mehrere cylindrische, oder konische Flächen eine tangirende Ebene zu legen.

Es ist leicht einzusehen, daß man an mehrere krumme Flächen, welche durch gerade Linien erzeugt und in geraden Linien berührt werden, nur in besonderen Fällen eine sie gemeinschaftlich tangirende Ebene legen kann. Man kann leicht untersuchen, ob dieses bei mehreren, mit Hülfe der Projectionsebenen dargestellten cylindrischen, oder konischen Flächen Statt findet. Es ist nämlich dann der Fall, wenn an die Tracen sämmtlicher krummen Flächen in einer Projectionsebene eine gemeinschaftliche Tangente gezogen werden kann, und wenn diejenigen Lagen der geraden Erzeugungslinien, welche durch die Berührungspunkte jener gemeinschaftlichen Tangente bestimmt werden, oder ihnen entsprechen, in einer und derselben Ebene liegen. Hiernach läßt sich nun bei mehreren gegebenen cylindrischen,

oder konischen Flächen untersuchen, ob eine Ebene gelegt werden kann, die alle berührt. Im Fall es möglich ist, ergibt sich dann diese Ebene sehr leicht durch jene gemeinschaftliche Tangente und eine der erwähnten Lagen der Erzeugungslinien.

§. 204. Aufgabe.

An zwei Kugelflächen eine tangirende Ebene zu legen.

Werden beide Flächen durch eine Ebene nach größten Kreisen geschnitten, und an diese Kreise eine gemeinschaftliche Tangente gezogen, so wird diese entweder beide Kreise auf einer Seite haben und die Gerade zwischen ihren Mittelpunkten in ihrer Verlängerung schneiden, oder parallel mit ihr seyn; oder sie hat auf jeder Seite einen Kreis und schneidet jene Gerade zwischen den Mittelpunkten. Denkt man sich nun die schneidende Ebene um die gerade Verbindungslinie der Mittelpunkte gedreht, so erzeugt die erwähnte Tangente im ersten Falle eine konische, oder cylindrische Fläche, welche beide Kugelflächen umhüllt, und im andern Falle zwei konische Flächen, deren jede eine Kugelfläche umhüllt, und bei denen die Seiten der einen Verlängerung der Seiten der andern sind; beide Flächen sind daher von der Art, daß an beide zugleich tangirende Ebenen gelegt werden können. Jede Ebene, welche nun an die Kegel- oder Cylinderfläche im ersten Falle, und an beide Kegelflächen im andern Falle tangirend gelegt wird, berührt auch beide Kugelflächen. Da nun, im einen wie im andern Fall, unendlich viele solcher Ebenen gelegt werden können, so gibt es auch unendlich viele Ebenen, die an zwei Kugelflächen tangirend sind.

§. 205. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine tangirende Ebene an zwei Kugelflächen zu legen.

Nachdem man nach dem vorigen §. die cylindrische Fläche, oder die Kegelflächen bestimmt hat, von denen beide Kugelflächen umschlossen und berührt werden, lege man durch den gegebenen Punkt nach §. 190. 191. eine tangirende Ebene an eine derselben, so ist die Aufgabe aufgelös't. Da man nun durch den gegebenen Punkt an die cylindrische, oder konische Fläche, und an die Doppelkegelfläche zwei tangirende Ebenen legen kann, so folgt daraus, daß es überhaupt vier Ebenen gibt, welche der Aufgabe genügen, wobei jedoch vorausgesetzt wird, daß der Punkt außerhalb dieser einschließenden Flächen liegt. Fällt er in die Spitze der konischen Flächen, so gibt es unendlich viele tangirende Ebenen; liegt er in einer der umschließenden Flächen, so gibt es für diese Fläche nur eine. Wie es sich verhält, wenn er noch einige andere Lagen hat, z. B. in der beide Kugelflächen umhüllenden, dennoch aber innerhalb der Doppelkegelfläche liegt, ergibt sich bei einigem Nachdenken leicht.

§. 296. Aufgabe.

An drei Kugelflächen eine tangirende Ebene zu legen.

Man denke sich eine Kegelfläche, welche die Kugelflächen A und B, und eben so eine Kegelfläche, welche die Kugelflächen A und C umhüllt. Eine Ebene, welche nun durch beide Kegelspitzen an eine dieser Kugelflächen gelegt wird, berührt zugleich beide Kegelflächen, folglich auch die drei Kugelflächen. Um dieses einzusehen, denke man sich, eine Ebene, welche die erste Kegelfläche, oder die Kugelflächen A und B berührt, würde so weit gedreht, bis sie auch die dritte Kugelfläche berührt. Sobald dieses geschieht, berührt sie auch die Kegelfläche um A und C, geht daher auch durch die Spitze dieser Kegelfläche. Verbindet man daher beide Spitzen durch eine Gerade, so ist die Aufgabe

auf §. 202 zurückgeführt, wo durch eine Gerade eine tangirende Ebene an eine Kugelfläche gelegt wurde. Es können, wie wir wissen, zwei solcher Ebenen gelegt werden.

Denkt man sich ferner jede der zwei Ebenen, welche nach §. 204 an je zwei dieser drei Kugelflächen so tangirend gelegt werden können, daß sie eine Kugelfläche auf jeder Seite haben, so weit gedreht, bis sie die dritte Kugelfläche berührt, so wird man einsehen, daß es auf diese Weise noch sechs, mithin in allem acht Ebenen gibt, welche die drei Kugelflächen zugleich berühren. Es kommt dabei nur darauf an, durch jede Seite des Dreiecks, welches durch die drei Spitzen der Doppelkegelflächen gebildet wird, zwei tangirende Ebenen an eine der drei Kugelflächen zu legen; diese berührt alsdann auch die beiden andern.

§. 207.

Nunmehr sind wir auch im Stande die in §. 118 angedeutete Betrachtung der doppelt gekrümmten Curven in Bezug auf daran zu ziehende Tangenten vorzunehmen. Es ist schon in §. 102 gesagt worden und auch leicht einzusehen, daß man doppelt gekrümmte Curven im Allgemeinen als den Durchschnitt zweier krummen Flächen ansehen kann. Denken wir uns nun einen solchen Durchschnitt, und durch einen Punkt desselben eine tangirende Ebene an jede der beiden krummen Flächen gelegt, so liegt die durch den nämlichen Berührungspunkt an die Curve gezogene Tangente, nach §. 184., in jeder dieser tangirenden Ebenen; sie ist demnach der Durchschnitt derselben.

§. 208.

Es sollen nun die einzelnen Fälle näher untersucht werden, welche vorkommen können, wenn eine

Tangente an eine doppelt gekrümmte Curve gezogen werden soll.

1r Fall. Wenn der Berührungspunkt gegeben ist. Man sehe die Curve als die Directionslinie zweier krummen Flächen, z. B. zweier Cylinderflächen von beliebigen Erzeugungslinien an, projicire diese Flächen nach §. 162., und lege durch den gegebenen Punkt an jede eine tangirende Ebene (§. 186.), so ist der Durchschnitt dieser beiden Ebenen die gesuchte Tangente (§. 207.). Der Einfachheit wegen kann man stets zwei cylindrische Flächen wählen, von denen jede auf einer Projectionsebene senkrecht ist.

2r Fall. Wenn die Tangente durch einen außerhalb der Curve gegebenen Punkt gehen soll.

Denkt man sich an eine doppelt gekrümmte Curve alle mögliche Tangenten gezogen, so wird durch alle diese Tangenten irgend eine Fläche bestimmt, in welcher umgekehrt auch wieder alle Tangenten an der Curve liegen müssen. Daher können auch nur von solchen außerhalb der Curve gelegenen Punkten, welche in dieser Fläche liegen, Tangenten gezogen werden. Legt man nun nach §. 190 durch den gegebenen Punkt an die im ersten Falle erwähnten cylindrischen Flächen tangirende Ebenen, so wird deren Durchschnitt die gegebene Curve berühren, oder nicht. Ist jenes der Fall, so ist die Aufgabe aufgelös't, denn dieser Durchschnitt ist alsdann die verlangte Tangente; im andern Fall aber geht daraus hervor, daß der gegebene Punkt nicht in der erwähnten Fläche durch alle Tangenten liegt, und daß daher von ihm keine Tangente an die Curve gezogen werden kann. Man sieht leicht, ob der Durchschnitt der tangirenden Ebenen die Curve berührt, denn in diesem Falle durchschneiden sich die bei-

den Berührungslinien der Ebenen, und zwar in einem Punkte der Curve.

3r Fall. Wenn die Tangente mit einer gegebenen Geraden parallel sein soll.

Es ist leicht einzusehen, daß die Auflösung dieses Falles nur dann möglich ist, wenn die gegebene Gerade eine solche Lage hat, daß sie mit einer der unzähligen Tangenten, welche an der Curve möglich sind, parallel ist, und daß es dann nur darauf ankommt, gerade diese Tangente zu bestimmen. Man lege daher nach §. 196 mit der gegebenen Geraden parallele tangirende Ebenen an die im ersten Falle erwähnten cylindrischen Flächen, so ist auch der Durchschnitt dieser Ebenen mit der Geraden parallel. Berührt er nun zugleich die gegebene Curve, so ist er die gesuchte Tangente. Findet dieses aber nicht Statt, so gibt es keine Tangente an der Curve, welche mit der gegebenen Geraden parallel ist. Es läßt sich wieder, wie im zweiten Falle, leicht erkennen, ob die Curve von dem Durchschnitt der Ebenen berührt wird oder nicht.

Achter Abschnitt.

Von den Durchschnitten krummer Flächen, den Tangenten an den Durchschnitten und der Entwickelung der Flächen.

Von den Durchschnitten krummer Flächen mit Ebenen.

§. 209.

Die im sechsten Abschnitte auseinander gesetzte Darstellungsweise der krummen Flächen ist zugleich sehr geeignet, die Durchschnitte krummer Flächen mit Ebe-

nen zu bestimmen. Da nämlich diese Durchschnitte in den krummen Flächen liegen, so entspricht jedem ihrer Punkte eine Lage der Erzeugungslinie, und der Punkt gehört mithin der Erzeugungslinie in dieser Lage und der schneidenden Ebene zugleich an; er ist also der Durchschnitt beider. Nimmt man daher innerhalb der Grenzen des Schnittes mehrere Lagen der Erzeugungslinie an, und bestimmt ihre Durchschnitte mit der schneidenden Ebene, so sind diese Durchschnitte Punkte des gesuchten Durchschnitts der krummen Fläche und der Ebene. Hat man auf diese Art eine hinreichende Anzahl solcher Punkte bestimmt, so ergibt sich durch ihre Verbindung der verlangte Durchschnitt selbst.

Diese allgemeine Methode der Bestimmung des Durchschnitts einer krummen Fläche und einer Ebene schließt nicht aus, daß man in einzelnen Fällen einfachere Wege einschlagen kann. Fällt z. B. die schneidende Ebene mit der Ebene der Erzeugungscurve an der Stelle des Schnitts zusammen, so ist diese Curve in dieser Lage selbst der zu bestimmende Durchschnitt. So verhält es sich, wenn Cylinder- und Kegelflächen parallel mit den Grundflächen durch Ebenen geschnitten werden.

In den folgenden Beispielen sollen, außer den Projectionen solcher Schnitte, noch die wahre Gestalt und Größe derselben durch Umlegung in eine Projectionsebene, ferner die durchschnittenen krummen Flächen, wenn sie entwickelbar sind, mit der Durchschnittslinie in einer Ebene entwickelt und hier, wie an den Projectionen und umgelegten Schnitten, die Tangenten gezogen werden.

§. 210. Aufgabe.

Ein vertikaler Cylinder A′B′C′ ..., a″g″G″A″ (Fig. 64.) wird durch eine auf der vertikalen Projectionsebene senkrechte Ebene o′o″A″ geschnitten. Man

soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwicklen und eine Tangente durch einen Punkt desselben ziehen.

1) Projection. Da der Cylinder vertikal ist, so ist A′B′C′ . . . die Horizontalprojection der ganzen Cylinderfläche, folglich auch des Schnitts; seine Vertikalprojection liegt in der Trace A″o″ und ist A″G″.

2) Umlegung. Statt die Ebene um eine ihrer Tracen umzulegen, dreht man sie kürzer um die in ihr liegende, mit der Vertikalebene parallele Achse A′p′, A″p″ des Schnitts bis sie mit dieser Ebene parallel ist; dann ist die Projection des Schnittes in dieser Lage auch zugleich seine wahre Größe und Gestalt. Die vor der Drehung auf der Vertikalebene senkrechten Linien BM, CL, DK..., welchen ihre Projectionen B′M′, C′L′, D′K′,... gleich sind, dürfen dann nur in B″, C″, D″.... senkrecht auf A″o″ gesetzt werden, weil sie die wahre Größe der durch B, C, D, ... gehenden, und auf der Vertikalebene senkrechten Sehnen des Schnittes angeben. Ihre Endpunkte B, M, D, L, D, K, ... sind alsdann Punkte der Curve und geben, gehörig mit einander verbunden, den umgelegten Schnitt A″BCD...

3) Entwickelung. Denkt man sich alle Elemente der Cylinderfläche, deren jedes zwischen je zwei auf einander folgenden Lagen der geraden Erzeugungslinie enthalten ist, gleichsam durch Scharniere mit einander verbunden, und die Fläche nach der Seite A′, a″A″ aufgeschnitten, so kann sie auf einer Ebene ausgebreitet werden (§. 173.). Da nun alle Elemente senkrecht auf der Trace A′B′C′.... sind, so wird die Entwickelung selbst erhalten, wenn man irgend eine Gerade a″a″ gleich dieser Trace macht, und die Seitenlinien nach ihrer ganzen Länge in den, ihren Fußpunkten A′, B′, C′,... entsprechenden Punkten a″, b″, c″... senkrecht darauf zieht. Macht man aber diese

Seiten a''A, b''B, c''C,... nur gleich a''A'', b''B'', c''C'',... in der Vertikalprojection des Cylinders, nämlich bis zu ihrem Durchschnitt mit der schneidenden Ebene, so wird offenbar durch ihre Endpunkte A, B, C,... die entwickelte Curve ABC... des Schnitts bestimmt. Um die Linie a''a'' der Trace A'B'C'... gleich zu machen, theilt man diese in gleiche Theile A'B', B'C'... (je kleiner, desto genauer wird die Entwickelung) und trägt sie in a''b'', b''c''... auf a''a'' über.

4) Tangente. Soll durch irgend einen Punkt E', E'' des Schnitts eine Tangente an diesen gezogen werden, so liegt ihre Vertikalprojection E''o'' in der Trace, und ihre Horizontalprojection E'o' ist im Punkt E' Tangente an der Horizontalprojection A'B'C'.... der Curve (§. 113.). Die Tangente schneidet die Horizontalebene in o', nämlich immer im Durchschnitt ihrer Projection mit der Trace der schneidenden Ebene.

Da die Tangente während der Drehung der schneidenden Ebene ihren Berührungspunkt E und ihren Durchschnitt p', p'' mit der Drehungsachse A'p', A''p'' beibehält und dieser Punkt seine Lage nicht ändert, so darf man, um die Tangente an der Umlegung zu erhalten, nur vom Berührungspunkt E nach dem festen Punkt p der Achse, also nach p'', eine Gerade ziehen, so ist sie die mit umgelegte Tangente.

Um die Tangente mit zu entwickeln, bedenke man, daß sich bei der Entwickelung der Winkel nicht ändert, den sie mit der Seite E', e''E'' der Cylinderfläche bildet, und daß man also in der Entwickelung im Punkt E, welcher dem Berührungspunkt entspricht, an die zugehörige Seite e''E nur jenen Winkel setzen darf, mit Berücksichtigung des Theils von A'B'C'... nach welchem sich die Tangente neigt. Da nun die

Tangente im Raume bis zu ihrem Durchschnitt o' mit der Horizontalebene, ferner ihrer Horizontalprojection E'o' bis zu diesem Durchschnitt, und mit der Höhe E''e'' ihres Berührungspunktes ein rechtwinkeliges Dreieck bildet, das jenen Winkel der Horizontalprojection gegenüber enthält; so darf man in der Entwickelung nur e''o = E'o' machen, um die entwickelte Tangente Eo zu erhalten.

Anmerkung. Wäre die schneidende Ebene horizontal, so würde der gesuchte Durchschnitt offenbar ein der Grundfläche des Cylinders gleicher Kreis sein. Bei vertikaler Lage der schneidenden Ebene ist dagegen der Durchschnitt ein Rechteck, dessen Seiten sich leicht ergeben.

§. 211. Aufgabe.

Eine cylindrische Fläche a'c'f'e', b''d''h''g'' (Fig. 65.) von beliebiger Basis a'b'c'd' wird durch eine willkührliche Ebene i'kl geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwicklen und eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Man suche den Durchschnitt n', n'' einer beliebigen Lage m'n', m''n'' der Erzeugungslinie der cylindrischen Fläche mit der Ebene i'kl nach §. 55., so sind die Punkte n', n'' Punkte der gesuchten Projectionen des Schnittes. Auf gleiche Weise suche man eine hinreichende Anzahl Durchschnitte anderer Lagen der Erzeugungslinie und verbinde sie gehörig mit einander, so erhält man die Projectionen n'r'o's'p', n''r''o''s''p'' des Schnittes. Begreiflich erhält man die äußersten Punkte o, p, r, s, wenn man diejenigen Lagen wählt, welche den Punkten a',b',c',d' der Basis zugehören. In der Horizontalprojection ist der Theil der Projection scharf gezogen, von welchem die entsprechenden Punkte im Raume von oben betrach-

tet sichtbar sind, dessen Punkte also durch Lagen der Erzeugungslinie bestimmt wurden, die vom Bogen a′b′c′ ausgehen. Dagegen sind in der Vertikalprojection diejenigen Punkte durch eine scharfe Linie verbunden, welche von Lagen der Erzeugungslinie herrühren, die dem Bogen b′a′d′ entsprechen.

2) Umlegung. Da der Schnitt in der Ebene i′kl liegt, so lege man eine hinreichende Anzahl Punkte desselben nach §. 26. mit der Ebene in eine Projectionsebene um, z. B. in die horizontale, und verbinde sie gehörig mit einander. Dadurch erhält man den umgelegten Schnitt nrosp.

3) Entwickelung. Wollte man die schiefe cylindrische Fläche zwischen dem Schnitt und der Horizontalebene entwicklen, so müßte man sie vorher durch eine auf ihrer Erzeugungslinie senkrechte Ebene durchschneiden, diesen Schnitt umlegen und seine wahre Länge auf eine gerade Linie tragen. In einzelnen Punkten dieser Linie müßte man dann, ähnlich dem Verfahren in §. 210., die entsprechenden Lagen der Erzeugungslinie in dem zu entwickelnden Theil der Fläche nach ihrer, zwischen dem Schnitt und der Horizontalebene enthaltenen, und erst aus ihren Projectionen zu bestimmenden wahren Länge, senkrecht auf- und abwärts tragen, sodann die dadurch bestimmten Punkte gehörig mit einander verbinden. Auf diese Art wird der Schnitt und die Trace sammt dem zwischen ihnen enthaltenen Theil der cylindrischen Fläche entwickelt. Siehe §. 228.

4) Tangente. Soll an einen Punkt n des Schnittes eine Tangente gezogen werden, so ziehe man nur durch die Projectionen des Punktes an die Projectionen des Schnitts die Tangenten n′i′, n″i″ (§. 113.). Um die eine, z. B. n″i″, leichter zu erhalten, darf

man sie nur durch die Vertikalprojection i'' des Durchschnitts i' der Tangente mit der Horizontalebene führen.

Wenn sich an die Basis der cylindrischen Fläche leichter als an die Projection des Schnitts eine Tangente ziehen läßt, oder die Tangente ohne die Projection des Schnitts verlangt wird, so ziehe man durch den Punkt m' der Basis, welcher der Lage der Erzeugungslinie durch den Berührungspunkt entspricht, eine Tangente m'i' an die Basis. Der Durchschnitt i' derselben mit der Trace l'k der schneidenden Ebene ist dann ein Punkt der Projection der Tangente i'n' an der Projection des Schnittes selbst; diese Projection der Tangente kann also leicht durch i' und n' gezogen werden. Um dieses einzusehen, denke man sich eine tangirende Ebene an die cylindrischen Fläche durch den Punkt n gelegt; sie berührt diese Fläche in der Lage mn der Erzeugungslinie und ihre Horizontaltrace m'i' ist Tangente an der Trace der Fläche (§. 186.). Die verlangte Tangente ist aber der Durchschnitt dieser Ebene und der schneidenden, mithin der Durchschnitt i' ihrer Tracen ein Punkt derselben (§. 184. 119.).

Da sich die Lage des Punktes i' der Tangente bei der Umlegung nicht ändert, so darf man nur von ihm nach dem umgelegten Berührungspunkt n eine Gerade ziehen, um die umgelegte Tangente i'n zu erhalten. Wäre der Schnitt in die vertikale Projectionsebene umgelegt worden, so müßte man die Trace i'k mit umlegen, darin den Punkt i' wieder angeben und dann verfahren, wie so eben gesagt wurde.

Um die Tangente mit zu entwicklen, muß man auf eine ähnliche Art verfahren wie in §. 210., dabei aber berücksichtigen, daß Alles, was dort in Bezug auf die Horizontalebene geschah, hier in Bezug auf die Ebene

geschehen muß, mit welcher man die cylindrische Fläche, Behufs der Entwickelung, senkrecht durchschneidet. Das dort erwähnte rechtwinkelige Dreieck wird demnach hier durch die Tangente vom Berührungspunkt an bis zu ihrem Durchschnitt mit dieser senkrechten Ebene, ferner der Projection dieses Theils der Tangente auf dieser Ebene, und durch den Abstand des Berührungspunktes von derselben gebildet. Die wahre Länge dieser Projection der Tangente muß also auf den entwickelten Durchschnitt der senkrechten Ebene am gehörigen Orte übergetragen werden. Oder man kann auch die wahre Größe des Winkels bestimmen, welchen die Tangente mit der Erzeugungslinie durch den Berührungspunkt macht, und ihn in die Entwickelung übertragen.

Anmerkung. Ist die Ebene mit der geraden Erzeugungslinie der cylindrischen Fläche parallel, so schneidet sie diese in Lagen jener Erzeugungslinie und die Durchschnittspunkte der Horizontaltrace der Ebene mit der Basis der cylindrischen Fläche sind Punkte der gesuchten Durchschnittslinien; diese können daher nun parallel mit der Erzeugungslinie gezogen werden.

§. 212. Zusatz.

Nunmehr ist man auch im Stande, die in §. 117. angeführte Projection einer Curve auf einer ihrer Normalebenen auszuführen. Man darf nämlich nur die Curve zur Directionslinie, und die durch die Normalebene bestimmte Tangente zur Erzeugungslinie einer cylindrischen Fläche nehmen, diese Fläche nach §. 162. projiciren und ihren Durchschnitt mit der Normalebene nach dem vorigen §. bestimmen; so ist dieser die gesuchte Projection der Curve auf der Normalebene.

§. 213. Aufgabe.

Ein gerader auf der Horizontalebene stehender Kegel a'b'c'd', a''c''d'' (Fig. 66.) wird durch eine auf

der Vertikalebene senkrechte Ebene c′e″f″ geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwickeln und eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Die Vertikalprojection des Schnittes ist f″h″. Die Horizontalprojection wird leicht auf folgende Weise erhalten. Da nämlich z. B. g″ die Vertikalprojection der Punkte ist, in denen die Ebene von der Erzeugungslinie in den Lagen b′d′, b″d″, i′d′, b″d″ geschnitten wird, so erhält man die Horizontalprojectionen dieser Punkte in den Durchschnitten g′, k′ des von g″ auf die Basis gefällten Perpendikels mit den Horizontalprojectionen b′d′, i′d″ jener Lagen der Erzeugungslinie. Auf diese Art kann man eine beliebige Anzahl Punkte der Horizontalprojection des Schnittes und mithin sie selbst, nämlich f′g′h′k′, bestimmen.

2) Umlegung. Da die Ebene des Schnittes senkrecht auf der Vertikalebene ist, so sind die Senkrechten von den Horizontalprojectionen einzelner Punkte des Schnittes auf die Basis, z. B. g′l, k′l, zugleich die Entfernungen der Punkte g, k im Raume von der Vertikaltrace, also die Halbmesser, mit welchen sich diese Punkte um diese Trace drehen, wenn der Schnitt in die Vertikalebene umgelegt wird. Macht man daher z. B. g″g senkrecht auf e″f″ und gleich g′l, ferner g″k = k′l, so sind die Punkte g und k des Schnittes nach g und k in die Vertikalebene umgelegt. Legt man eben so noch mehr Punkte um, so erhält man durch ihre Verbindung den umgelegten Schnitt fghk selbst. (Vergleiche §. 93.).

Eben so leicht kann der Schnitt in die Horizontalebene umgelegt werden. Die Halbmesser, mit welchen sich dann einzelne Punkte des Schnittes drehen, finden sich alle in der Trace f″e″ nach ihrer wahren Größe.

3) Entwickelung. Da alle Punkte der Basis der Kegelfläche von ihrer Spitze gleichweit entfernt sind und die Fläche entwickelbar ist (§. 174.), so muß die entwickelte Fläche des geraden Kegels ein Kreisausschnitt sein, dessen Bogen cc mit der Seite dc des Kegels beschrieben und der Länge der Peripherie a′b′c′a′ gleich ist. d″c″ ist die wahre Länge der Seite dc, weil diese Seite mit der Vertikalebene parallel ist. Wenn die Kegelfläche, wie hier angenommen ist, nach der Seite dc aufgeschnitten wird, und man macht ch und ch = c″h″, so wie auf der mittleren entwickelten Seite ad, af = a″f″, weil diese Projectionen den wahren Längen gleich sind, so erhält man in h, f, h drei Punkte des entwickelten Schnittes. Um noch andere Punkte desselben zu erhalten, z. B. denjenigen, welcher dem Punkte g′, g″ entspricht, ziehe man die Horizontalprojection d′b′ der Seite des Kegels durch g und mache in der Entwickelung die Länge des Bogens cb gleich der Länge von c′b′, so ist db die entwickelte Seite durch g. Auf db mache man bg gleich der wahren Länge von g′b′, g″b″, so ist g der gesuchte entwickelte Punkt. Die wahre Länge von g′b′, g″b″ erhält man sehr leicht, denn wenn lm = g′b′ gemacht wird, so ist sie g″m. Entwickelt man eben so noch mehr Punkte, so ergibt sich der entwickelte Schnitt hgfh selbst.

4) Tangente. Auch hier ist, wie in §. 211. bei dem Cylinder, die Tangente der Durchschnitt der schneidenden Ebene und der durch den Berührungspunkt g′, g″ an die Kegelfläche gelegten tangirenden Ebene. Da nun die Trace dieser Ebene Tangente im Punkt b′ an der Trace der Kegelfläche ist, so ist der Durchschnitt e′ dieser Trace b′e′ mit der Trace e′e″ der schneidenden Ebene ein Punkt der verlangten Tangente, und

zwar ihr Durchschnitt mit der Horizontalebene, folglich ist e'g' die Projection derselben. Ihre Vertikalprojection ist e''g''.

Macht man e''e = e''e' auf der mit umgelegten Trace e''e', und ziehe von e nach dem Punkt g, welcher am umgelegten Schnitte dem Berührungspunkte entspricht, eine Gerade eg, so ist sie die umgelegte Tangente.

In Betreff der Tangente eg an der Entwickelung bedenke man, daß der Winkel b'ge', den die Tangente mit der Seite db' der Kegelfläche im Raume einschließt, unverändert bleiben muß, und daß diese Seite mit der Tangente b'e' an der Trace einen rechten Winkel bildet, denn die Linie b'e' ist senkrecht auf der projicirenden Ebene der Seite b'd, weil sie auf der darin liegenden Linie d'b' senkrecht ist, und in der Horizontalebene liegt, welche jene Ebene senkrecht schneidet. Man darf also nur das im Raume befindliche rechtwinkelige Dreieck gb'e' in die Entwickelung übertragen, indem man hier be senkrecht auf bd und gleich b'e' macht; dann ist eg die entwickelte Tangente.

§. 214. Aufgabe.

Eine beliebige Kegelfläche wird von einer willkührlichen Ebene geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen, entwicklen und eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Die Projectionen werden durch gehörige Verbindung der Projectionen von Durchschnittspunkten einer hinreichenden Anzahl Lagen der geraden Erzeugungslinie oder Seiten der Kegelfläche mit der schneidenden Ebene erhalten.

2) Umlegung. Tangente. Der Schnitt wird auf die gewöhnliche Art umgelegt, und in Bezug auf die Tangente verfährt man wie bisher.

3) Entwickelung. Eine genaue Entwickelung der schiefen Kegelfläche ist nicht ganz leicht und dabei sehr weitläufig; sie kann deßhalb hier um so eher übergangen werden, als man sich der Wahrheit sehr nähern kann, wenn man den schiefen Kegel als eine Pyramide von sehr vielen Seiten betrachtet, ihre Seitenflächen nach der wahren Größe bestimmt und gehörig zusammensetzt (§. 93.). Trägt man von der Spitze der so entstandenen Entwickelung auf die verschiedenen entwickelten Seiten die wahre Länge ihrer Theile von der Spitze des Kegels bis zum Schnitt, so ergibt sich die entwickelte Curve des Schnittes. Die Tangente kann leicht mit Hülfe des Winkels, den sie mit der Seite durch den Berührungspunkt macht, in die Entwickelung übergetragen werden.

§. 215. Uebungsaufgaben.

1) Einen geraden Kegel nach einer Parabel oder Hyperbel zu schneiden (§. 133. 137.), den Schnitt zu projiciren, umzulegen und die Kegelfläche mit demselben zu entwickeln.

2) Das Netz eines schiefen Kegels zu construiren, wozu z. B. die Grundfläche, Achse und Neigung der Achse gegeben sind.

3) Das Netz eines geraden, schiefabgeschnittenen Kegels aus seinen Projectionen zu zeichnen.

4) Auf einer cylindrischen oder konischen Fläche zwischen zwei Punkten derselben den kürzesten Weg anzugeben. — Entwickle die Fläche sammt den Punkten, verbinde letztere durch eine gerade Linie 2c.

§. 216. Aufgabe.

Eine Kugelfläche A′, A″ (Fig. 67.) wird durch eine Ebene a′a″c″ geschnitten, welche senkrecht auf der Vertikalebene ist. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen und eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Da die schneidende Ebene senkrecht auf der Vertikalebene ist, so ist d''c'' die Vertikalprojection des Schnitts und zugleich der Durchmesser desselben, weil der Schnitt ein Kreis ist. Um die Horizontalprojection zu erhalten, mache man a'c durch den Mittelpunkt der Projection A' senkrecht auf a'a'', führe d'' und c'' herab, so ist d'c' die Projection des mit der Vertikalebene parallelen Durchmessers des Schnittes. Führt man irgend einen Punkt h'' nach h' und macht h'g' = h'f' = h''f, wenn h''f senkrecht auf d''c'' und der Kreis fc''gd'' mit ½d''c'' beschrieben ist, so sind f', g' Punkte der Horizontalprojection, welche den Punkten f, g entsprechen. Eben so sucht man noch mehr Punkte der Projection d'g'cf'' des Schnittes. Die Berührungspunkte l', l' werden erhalten, wenn man durch das Centrum der Vertikalprojection der Kugel eine Parallele mit der Basis zieht, wodurch sich l'' ergibt, und sodann wie bei den Punkten f', g' verfährt.

2) Umlegung. Da der Schnitt ein Kreis vom Durchmesser d''c'' ist, so ist der Kreis d''fc''g offenbar die wahre Größe des Schnittes.

3) Tangente. Die Vertikalprojection der Tangente im Punkt i', i'' am Schnitt ist i''a''. Diese Tangente schneidet die mit der Vertikalebene parallele Drehungsachse a'd', a''d'' in einem Punkte k', k'', den man erhält, indem man im Punkt i des gedrehten Schnittes eine Tangente ik'' an denselben zieht. Wird k'' nach k' geführt, so ist k'i' die Horizontalprojection der Tangente. Man hätte diese Projection auch unmittelbar tangirend an d'i'c'g' ziehen können (§. 113).

§. 217. Aufgabe.

Eine beliebige Revolutionsfläche a'b'c', a''d''c''e'' (Fig. 68 a), deren Achse vertikal ist, wird durch eine

willkührliche Ebene fgh geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren, umlegen und eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Man denke sich, die Fläche sei durch die Bewegung eines horizontalen Kreises erzeugt worden (§. 175.), und bestimme in verschiedenen Lagen die Durchschnitte desselben mit der schneidenden Ebene, so sind diese Durchschnitte Punkte des gesuchten Schnittes, denn sie sind der krummen Fläche und der Ebene gemeinschaftlich. Man führe daher eine Reihe horizontaler Ebenen, welche die Fläche schneiden, z. B. i''k'', und bestimme die Horizontalprojection i'k' ihres Durchschnitts mit fgh (§. 61). Da dieser Durchschnitt eine horizontale Linie in fgh ist, so ist seine Projection i'k' parallel mit fg und geht durch die Horizontalprojection k' seines Durchschnitts k'' mit der Vertikalebene. Beschreibt man nun aus dem Mittelpunkte d' von a'b'c' mit dem Halbmesser lm des Kreises, in welchem die krumme Fläche von der Horizontalebene i''k'' geschnitten wird, einen Kreis, so sind die Durchschnitte i', n' desselben mit i'k' die Horizontalprojectionen zweier Punkte des gesuchten Schnittes, denn die Punkte i, n liegen in der krummen Fläche, weil sie dem Kreise mit lm um d' angehören, und liegen in der Ebene fgh, weil sie sich in einer Linie ik derselben befinden. Führt man diese Punkte auf lk'', so erhält man die zugehörigen Vertikalprojectionen i'', n''. Sucht man auf gleiche Art die Projectionen von noch mehr Punkten des Schnittes, so ergeben sich durch ihre Verbindung die Projectionen i'b'c'n', i''b''c''n'' desselben.

Durch welches Verfahren findet man direct die Berührungspunkte der Vertikalprojection des Schnittes mit der Vertikalprojection a''d''c''e'' der krummen Fläche? Vergl. die Bestimmung der Punkte b', c'.

2) Umlegen. Dieß geschieht wie gewöhnlich.

3) Tangente. Soll an den Punkt n′, n″ des Schnitts eine Tangente gezogen werden, so ziehe man nur, wie bisher, an die Projectionen des Schnittes durch n′, n″ Tangenten. Da durch die eine dieser Tangenten der Durchschnitt o′ der Tangente im Raume mit der Horizontalebene bestimmt wird, so kann die andere leicht gezogen werden. Weiß man an die Projectionen der Curve keine Tangente zu ziehen, so lege man durch den Punkt n eine tangirende Ebene an die Revolutionsfläche (§. 188.) und bestimme ihren Durchschnitt mit der Ebene fhg. Dieser ist alsdann die gesuchte Tangente. An den in die Horizontalebene umgelegten Schnitt wird die Tangente von o′ aus wie gewöhnlich gezogen.

§. 218. Aufgabe.

Eine regelrechte Fläche a′b′d′c′, a″b″d″c″ (Fig. 54.) wird durch eine Vertikalebene b′c′ geschnitten. Man soll den Schnitt projiciren und umlegen.

1) Projection. b′c′ ist offenbar die Horizontalprojection des Schnittes und n′, o′, p′,... sind die Horizontalprojectionen derjenigen Punkte desselben, in denen die entsprechenden Lagen e′f′, e″f″, g′h′, g″h″... der Erzeugungslinie die Ebene b′c′ schneiden. Führt man diese Punkte in die Vertikalprojectionen e″f″, g″h″ . . . dieser Lagen, so erhält man die Vertikalprojectionen n″, o″, p″... jener Punkte und mithin auch die Vertikalprojection c″n″o″ . . . b″ des Schnittes.

2) Umlegen. Man lege die schneidende Ebene um b′c′ in die Horizontalebene um. Werden also n′n, o′o, p′p... der Reihe nach gleich n″r, o″s, p″t... und senkrecht auf b′c′ gemacht, so entsteht der umgelegte Schnitt cnop.

Anmerkung. Hat die schneidende Ebene eine beliebige Lage, so wird man nach dem Bisherigen auch im Stande sein, den Schnitt zu projiciren und umzulegen.

§. 219. Uebungsaufgaben.

1) Die Durchschnitte einer geraden Linie mit einer Cylinderfläche, einer Kegelfläche und einer Revolutionsfläche zu bestimmen.

a) Mit einer Cylinderfläche. Man lege nach §. 74. durch die Linie eine Ebene parallel mit der Achse oder der Erzeugungslinie der Cylinderfläche und bestimme ihre geraden Durchschnittslinien mit dieser Fläche nach der Anmerkung zu §. 211. Die Durchschnitte der Projectionen dieser Linien mit den Projectionen der gegebenen Geraden sind nun die gesuchten Punkte.

b) Mit einer Kegelfläche. Führe durch die gegebene Gerade und die Spitze des Kegels nach §. 40. eine Ebene und verfahre dann auf eine ganz ähnliche Art wie in Nro. 1.

c) Mit einer Revolutionsfläche. Lege durch die Gerade eine Ebene und bestimme den Durchschnitt derselben mit der krummen Fläche nach §. 217. Die Durchschnitte der Geraden mit diesem Durchschnitt sind die gesuchten Punkte. Bei der Kugelfläche ist die zu legende Ebene am besten vertikal, weil dann ihr kreisförmiger Durchschnitt mit der Kugelfläche sammt der Linie leicht umgelegt werden kann. Vergl. das Verfahren in §. 194.

Der Anfänger führe diese Aufgabe auf dem Papier aus.

2) Den Durchschnitt eines Prisma's oder einer Pyramide mit einer Kugelfläche zu construiren.

C3 In der äußeren abgerundeten Böschung eines Grabens eine Treppe von gegebenen Dimensionen zu zeichnen; Fig. 68 b. gibt hierzu Anleitung: a ist die fragliche Böschung, b ein Theil des Vorplatzes der Treppe, c, d, e, f, g sind die Stufen, h stellt das Profil der Treppe vor, wenn man sich alle Stufen in eine und dieselbe Vertikalebene zurückgeführt denkt. iklm ist der obere Grabenrand. Offenbar hat man bei dieser Aufgabe die Durchschnitte einer Reihe horizontaler, sodann einer Reihe fächerartig gelegter vertikaler Ebenen und zweier gekrümmten Böschungen zu finfinden. Zur Uebung kann der Anfänger eine doppelte Treppe nach folgenden Maßen zeichnen. Halbmesser der Abrundung 50′, Tiefe des Grabens 12′, Anlage der Böschung 2′, Höhe der Stufen ½′, Breite derselben in der Mitte 1′, Länge derselben 3′; Entfernung der untersten Stufen beider Treppen, also Länge des gemeinschaftlichen Vorplatzes 10′.

Von den Durchschnitten krummer Flächen unter sich.

§. 220.

Auch zur Bestimmung des Durchschnitts zweier krummen Flächen ist die im sechsten Abschnitt abgehandelte Darstellungsart dieser Flächen sehr geeignet. Man denke sich nämlich innerhalb der Grenzen des Schnitts irgend eine Ebene, z. B. eine horizontale, so wird sie jede der beiden Flächen schneiden, und weil diese Durchschnitte in einer und derselben Ebene und an derjenigen Stelle der krummen Flächen liegen, wo sich diese schneiden, so schneiden sie sich selbst. Die Punkte, in welchen dies geschieht, sind nun offenbar Punkte beider krummen Flächen, gehören also ihrem Durchschnitt an. Aus einer Reihe solcher Hülfsebenen innerhalb

der Grenzen des Durchschnitts der krummen Flächen, wird nun eine Reihe, beiden Flächen gemeinschaftlicher Punkte hervorgehen und dadurch der Durchschnitt beider Flächen selbst bestimmt werden.

Es ist hieraus ersichtlich, daß es bei der Bestimmung der Durchschnitte krummer Flächen unter sich hauptsächlich darauf ankommt, solche Hülfsebenen zu wählen, deren Durchschnitte mit den krummen Flächen möglichst leicht zu projiciren sind. Dazu gehört aber, wie man leicht einsieht, daß diese Durchschnitte gerade Linien, oder Kreise, letztere in paralleler Lage mit einer der Projectionsebenen, sind. Wo es demnach möglich ist, muß man zu Hülfsflächen Ebenen in der Lage wählen, daß ihre Durchschnitte mit den krummen Flächen diesen Forderungen gemäß ausfallen. Ob und in welchen Fällen dies aber geschehen kann, hängt von der Natur der krummen Fläche und von ihrer Lage gegen die Projectionsebenen ab. Bei der Wahl dieser Hülfsflächen wird man vorzüglich durch die Betrachtung der Entstehungsart der krummen Flächen geleitet, indem sich daraus ermessen läßt, ob gerade oder kreisförmige Durchschnitte mittelst Ebenen in der angeführten Lage möglich sind.

Es gibt indessen auch Fälle, in welchen krumme Flächen zu Hülfsflächen genommen werden können. So ist es z. B. vortheilhaft, zur Bestimmung des Durchschnitts zweier Revolutionsflächen, deren Achsen sich schneiden, zu Hülfsflächen Kugelflächen anzunehmen, die ihre Mittelpunkte in dem erwähnten Durchschnitte der Achsen haben. Diese Kugelflächen schneiden alsdann beide Revolutionsflächen in Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf den betreffenden Achsen sind, und deren Mittelpunkte auch in den Achsen liegen. Die Durchschnitte zweier solcher Kreise, die in einer und dersel-

den Kugelfläche liegen, sind dann beiden Revolutionsflächen gemein, mithin sind sie Punkte des gesuchten Durchschnitts derselben (§. 229.).

§. 221. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier cylindrischen Flächen zu construiren.

Wenn die Horizontaltracen beider Flächen Kreise sind, so sind es auch die Durchschnitte aller Horizontalebenen mit den Flächen und daher leicht zu construiren. Um diese Kreise zu projiciren, sucht man nur die Horizontalprojection des Durchschnitts der Achse eines Cylinders mit der schneidenden Ebene, und beschreibt daraus mit dem Halbmesser der Basis einen Kreis; in Bezug auf den andern Cylinder verfährt man eben so. Die etwaigen Durchschnitte von zwei solchen, einer und derselben Horizontalebene entsprechenden Kreisen sind alsdann die Horizontalprojectionen von Punkten des gesuchten Schnittes. Die zugehörigen Vertikalprojectionen ergeben sich leicht in der Vertikaltrace der schneidenden Ebene. Durch eine Reihe horizontaler Hülfsebenen läßt sich auf diese Art der Durchschnitt beider Cylinderflächen ohne Weitläufigkeit bestimmen. Schneiden sich die Projectionen der beiden, in einer Ebene liegenden Kreise nicht, so ist dieses ein Zeichen, daß sich die krummen Flächen am Orte des Schnitts der Hülfsebene selbst nicht schneiden.

Sind die geraden Erzeugungslinien beider cylindrischen Flächen mit einander parallel, so können sie sich in keiner Lage begegnen, und die Flächen selbst können sich dann nur da schneiden, wo ihre Erzeugungslinien zusammen fallen, also in geraden Linien. Die Durchschnitte beider Tracen der Flächen sind alsdann Punkte dieser Durchschnitte der Flächen selbst, und die Projectionen dieser Durchschnitte lassen sich hiernach leicht ziehen.

Sind aber die Tracen beider Flächen keine Kreise und die Erzeugungslinien nicht parallel, so denke man sich eine Ebene parallel mit diesen beiden Linien und beide Flächen schneidend. Die vier Geraden, in welchen dieses geschieht, werden sich in vier Punkten schneiden, und diese sind Punkte des gesuchten Durchschnitts. Durch eine Reihe solcher Ebenen erhält man eine Reihe solcher Punkte und durch deren Verbindung den Durchschnitt selbst. Es ist begreiflich, daß dieser Durchschnitt eine einzige Curve bilden, oder auch aus zwei Curven bestehen kann, je nachdem der eine Cylinder den andern auf einer Seite schneidet, oder ihn gleichsam durchbohrt.

Es sei $a'b'e'f'$, $a''c''g''h''$ (Fig. 69. a.) die eine und $k'm'n'o'$, $i''l''p''q''$ die andere cylindrische Fläche. Um die mit den Erzeugungslinien beider Flächen parallele Hülfsebene zu legen, ziehe man durch irgend einen Punkt r', r'' eine Parallellinie $r's'$, $r''s''$ mit der einen, und eine andere Parallellinie $r't'$, $r''t''$ mit der andern Erzeugungslinie. Diese Linien schneiden die Horizontalebene in s' und t', mithin ist $s't'$ die Trace der gesuchten Ebene, welche die erste cylindrische Fläche in den Geraden $u'v'$, $u''v''$ und $w'x'$, $w''x''$, und die andere in $y'z'$, $y''z''$ und $a'v'$, $a''v''$ schneidet. Die vier Durchschnittspunkte z', z'', v', v'', b', b'', x', x'' dieser vier Linien sind nun offenbar Punkte des gesuchten Durchschnitts der Flächen, weil jeder in beiden Flächen zugleich liegt.

Man hat nicht nöthig die Vertikalprojectionen der vier Durchschnittslinien wirklich zu ziehen, sondern es reichen deren zwei hin, z. B. $u''v''$ und $w''x''$, weil man in diesen die Vertikalprojectionen z'', v'', x'', b'' durch Senkrechte von z', v', x', b' auf die Basis erhält. Da übrigens dieselben Punkte erhalten werden

müssen, so kann das eine Verfahren zur Prüfung des andern dienen.

Auf dieselbe Art erhält man noch mehr Punkte des gesuchten Durchschnitts. Indessen braucht man jetzt nur parallele Ebenen mit der Ebene durch s't' zu legen, und die Schnitte einer solchen neuen Ebene mit den cylindrischen Flächen werden sehr leicht erhalten, indem man eine neue Trace, z. B. c'd' mit s't' parallel, und durch ihre Durchschnittspunkte e', f', c', d' mit den Tracen der Flächen parallele Linien e'g', f'h', c'g', d'h' mit den Horizontalprojectionen der betreffenden Erzeugungslinien zieht. Die dadurch erhaltenen vier Durchschnittspunkte i', g', h', k' sind nun die Projectionen von vier neuen Punkten des Durchschnitts der Flächen. Ihre Vertikalprojectionen i'', g'', h'' k'' werden wie vorhin bestimmt.

Schneidet die erste Trace s't' nicht beide Tracen der cylindrischen Flächen, so zieht man eine Parallellinie mit ihr, bei welcher dies der Fall ist, und verfährt wie bei der Trace c'd'. Gibt es keine Trace, die mit s't' parallel ist und beide Tracen zugleich schneidet, so zeigt dieß an, daß sich die beiden Flächen selbst nicht schneiden. Können an die Trace der einen Cylinderfläche zwei mit s't' parallele Tangenten gezogen werden, welche beide die Trace der andern Fläche schneiden, so durchbohrt jene Cylinderfläche diese und es gibt zwei Durchschnittscurven; im andern Falle gibt es nur eine Curve.

Die richtige Verbindung der gefundenen Punkte erfordert eine ziemliche Aufmerksamkeit. Man thut wohl die parallelen Tracen der Ebenen in einer gewissen Ordnung auf einander folgen zu lassen und sich deren Schnitte mit den krummen Flächen möglichst deutlich im Raume vorzustellen. So sieht man z. B., daß die

punktirten Theile l'b', l''b'' der Projectionen durch diejenigen Theile der cylindrischen Flächen entstehen, welche die Bogen w'c', y'f' zu Tracen haben; die Durchschnitte aller Geraden, welche von diesen Bogen ausgehen, werden sich daher ohne Schwierigkeit verbinden lassen.

In Betreff derjenigen Theile der gefundenen Projectionen, welche scharf zu ziehen sind, oder punktirt werden müssen, richte man sich nach §. 211. Nro. 1). In der Horizontalprojection sind nämlich alle Punkte sichtbar, welche Durchschnitte von Geraden sind, die beide von oben gesehen werden, und in der Vertikalprojection, wenn die Geraden von vornen sichtbar sind. Sieht man aber keine, oder nur eine der beiden Geraden zum Theil, so ist ihr Durchschnitt unsichtbar.

Wird eine Tangente am gefundenen Durchschnitt beider cylindrischen Flächen verlangt, so kann sie leicht nach §. 207. gezogen werden.

§. 222. Zusatz.

Nicht selten läßt sich die im vorigen §. beschriebene allgemeine Methode der Bestimmung des Durchschnitts zweier cylindrischer Flächen vereinfachen. Dieß ist namentlich häufig bei eigentlichen Cylinderflächen der Fall, zumal wenn ihre Achsen in einerlei Ebene liegen. Ist diese Ebene nicht horizontal, so kann sie leicht in diese Lage gedreht werden. Es sei z. B. abcd (Fig. 69 b.) ein Cylinder mit horizontaler Achse, der auf der einen Seite senkrecht, auf der andern schief von einem andern Cylinder geschnitten wird; die Achsen dieser Cylinder sollen sich mit der Achse des Cylinders abcd in einerlei Horizontalebene befinden. Man soll die Durchschnitte der Cylinder zeichnen. Die Halbkreise agb, egf, egf sind die umgelegten halben senkrechten Durchschnitte der Cylinder. Sind die Größen ih, ih, ih gleich und gg, gg, gg senkrecht darauf, so liegen die von den aufgestellten

Punkten g ausgehenden Seitenlinien der drei Cylinderflächen in gleicher Höhe über der Achsenebene, also in einer mit dieser parallelen Ebene und schneiden sich daher in den Punkten l, l, l, l, welche Punkte der gesuchten Durchschnitte sind. Verändert man die Größe ih und verfährt hierauf, wie so eben angegeben wurde, so werden noch mehr Punkte wie l erhalten. Die äußersten Seiten, z. B. ec und bc liegen mit den Achsen in einerlei Ebene, daher ist auch ihr Durchschnitt c ein Punkt der gesuchten Durchschnittslinie. Die Vertikalprojectionen dieser Linien lassen sich auf einer beliebigen Vertikalebene leicht bestimmen, da man die Höhe ih der Punkte l über der horizontalen Achsenebene kennt.

Liegt die Achse des einen Cylinders bei übrigens horizontaler Lage um eine gewisse Größe m höher, als die des andern, z. B. die Achse von cf um m höher, als die von ca, so trägt man die aus dem Halbkreise egf entnommene Höhe ih nicht wie oben von ab aus auf ik, sondern von dem um m höher als i gelegenen Punkte n und verfährt sodann wie vorhin. Man sieht leicht ein, daß nun ebenfalls in den Cylinderflächen Seitenlinien von einerlei Höhe erhalten werden. Liegt endlich die eine Achse um m tiefer, als die von ca, so trägt man m, statt vorhin von i aufwärts, nun abwärts oder unterhalb ab.

Diese drei Cylinderflächen lassen sich sehr leicht nach Anleitung des §. 210. entwickeln, weil die Längen der Seitenlinien von den senkrechten Kreisdurchschnitten bis zu den Durchschnitten der Flächen sich unmittelbar aus der Zeichnung nehmen lassen.

§. 223. Aufgabe.

Den Durchschnitt eines Cylinders und eines Kegels zu construiren.

Denken wir uns eine Hülfsebene, welche beide gegebene Flächen in geraden Linien schneidet, so sind die etwaigen Durchschnittspunkte dieser Durchschnittslinien offenbar Punkte des gesuchten Schnittes, denn sie liegen in beiden Flächen zugleich. Durch eine Reihe solcher Ebenen kann mithin die Aufgabe aufgelös't werden. Da nun die Kegelfläche nur von solchen Ebenen in geraden Linien geschnitten wird, welche durch die Spitze gehen, so müssen alle Hülfsebenen durch diesen Punkt und zugleich so geführt werden, daß sie auch die Cylinderfläche in Geraden schneiden, mithin parallel mit der Erzeugungslinie dieser Fläche. Führt man zu dem Ende durch die Spitze eine Parallellinie mit dieser Erzeugungslinie, so liegt sie in allen Hülfsebenen, und ihr Durchschnitt mit der Horizontalebene ist ein Punkt, durch welchen die Tracen aller Hülfsebenen gehen. Man ziehe daher durch diesen Punkt eine Reihe von Tracen, welche die Tracen beider krummen Flächen schneiden. Die Durchschnittspunkte derjenigen Lagen der Erzeugungslinien, welche den so entstehenden Punkten entsprechen, sind nun, wie im §. 221, Punkte des gesuchten Durchschnittes. Man beobachtet überhaupt das nämliche Verfahren wie dort.

§. 224. Zusatz.

Auch hier gestatten besondere Umstände bisweilen, auf kürzerem Wege zum Ziel zu gelangen. Wenn sich z. B. die Achsen des Cylinders und Kegels senkrecht schneiden und beide in der horizontalen Projectionsebene liegen, wie abcd und efgh (Fig. 70 a.), so erhält man auf folgende einfache Art einen Punkt o' der gesuchten Projection des Durchschnitts. Man denke sich beide Körper mittelst einer Vertikalebene durch ik durchschnitten, so ist der Durchschnitt mit dem auf der Horizontalebene liegenden Halbcylinder ein nach iklm

umgelegtes Rechteck und der Durchschnitt mit dem Kegel der nach nop umgelegte Kreis. Die obere Seite lm des Rechtecks und dieser Kreis schneiden sich in o, und dieser Punkt ist, wenn man sich beide Figuren wieder aufgestellt denkt, ein Punkt des Durchschnitts der Flächen, also o′ seine Horizontalprojection, sowie oo′ die Höhe des Punkts über der Projectionsebene ist. Auf dieselbe Weise sucht man noch mehr Punkte und erhält so den Schnitt qo′r. Die Vertikalprojection des Durchschnitts könnte mittelst der Höhen wie oo′ leicht auf einer beliebigen Vertikalebene erhalten werden.

§. 225. Aufgabe.

Zwei gerade Kegel a′b′c′d′e′, a″d″e″ und f′g′c′h′, f″g″h″ (Fig. 70 b.) schneiden sich. Man soll ihren Durchschnitt projiciren, die Kegelflächen mit demselben entwicklen und durch einen Punkt des Durchschnitts eine Tangente daran ziehen.

1) Projection. Da beide Kegel gerad sind, und auf der Horizontalebene stehen, so werden sie durch horizontale Hülfsebenen in horizontalen Kreisen geschnitten, die daher leicht zu projiciren sind. Es sei i″k″ eine solche Ebene, so ist der Kreis i′n′o′k′, aus e′ mit li″ beschrieben, die Horizontalprojection des Kreises, in welchem der erste Kegel geschnitten wird. Dasselbe ist der Kreis p′n′o′q′ in Bezug auf die andere Kegelfläche. Die Durchschnitte n′, o′ dieser Kreise entsprechen Punkten, welche in beiden Flächen liegen, daher sind sie Punkte der gesuchten Horizontalprojection des Schnittes. Die zugehörigen Vertikalprojectionen n″, o″ ergeben sich in i″k″. Durch eine Reihe solcher Horizontalebenen erhält man eine Reihe von Punkten wie n′, n″, o′, o″, und durch deren Verbindung die

Projectionen b'n'o'c', b''n''o''c'' des gesuchten Durchschnitts selbst.

2) Entwickelung. Hierbei verfährt man ganz wie in §. 213. Beide Kegelflächen sind nur zum Theil, die Schnitte jedoch ganz, entwickelt.

3) Tangente. Zufolge §. 207. lege man durch den Berührungspunkt o', o'' an jede Kegelfläche eine tangirende Ebene (§. 187). Am ersten Kegel erhält man die Ebene u'vw, und am andern x'my. Der Durchschnitt x'o', x''o'' dieser Ebenen ist nun die verlangte Tangente (§. 207.). Da übrigens die Horizontaltracen dieser Ebenen als Tangenten an den Tracen der Kegelflächen leicht gezogen werden können, und ihr Durchschnitt x' ein Punkt der Tangente ist, so darf man nur von x' und x'' nach o' und o'' gerade Linien ziehen und erhält dadurch die Projectionen der verlangten Tangenten, ohne die tangirenden Ebenen wirklich zu legen und ihren Durchschnitt zu bestimmen. Die Berührungspunkte der Tangenten x'u' und x'z' werden durch die Halbmesser h'z', e'u' durch o' bestimmt. In den Entwicklungen ergibt sich die Tangente leicht wie oben §. 213.

§. 226. Zusatz.

Auf dieselbe leichte Art, wie hier der Durchschnitt der zwei geraden Kegel bestimmt worden ist, kann man immer da verfahren, wo die Schnitte horizontaler Ebenen mit beiden krummen Flächen Kreise sind, also z. B. bei zwei Kugelflächen, bei eigentlichen Cylinder- oder Kegelflächen, deren Grundflächen horizontal sind; bei Revolutionsflächen, deren Achsen vertikal sind 2c. Es versteht sich übrigens, daß dieses Alles auch dann der Fall ist, wenn dasjenige, was hier auf die horizontale Projectionsebene bezogen wurde, in Beziehung auf die Vertikalebene Statt findet. Alsdann sind die Hülfs-

ebenen mit dieser Projectionsebene parallel. Auch muß man bei schiefen Cylindern und Kegeln zuerst die Mittelpunkte der Durchschnittskreise projiciren und aus diesen Projectionen die Projectionen der Kreise selbst beschreiben.

In Fig. 70 a. (rechts) sieht man noch zwei Kegel abcd, lstu, deren Achsen in der Horizontalebene liegen und senkrecht auf einander sind. Der Punkt v′ der Projection des Durchschnitts ist ganz wie oben §. 223. der Punkt o′ bestimmt worden, nur wurde hier statt des dortigen Rechtecks iklm das Trapez kxyz, als der Durchschnitt der Vertikalebene durch kx mit dem Kegel lstu umgelegt. Auf dieselbe Art bestimmt man noch mehr Punkte und somit den ganzen Durchschnitt.

§. 227. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier beliebigen konischen Flächen zu projiciren.

Man lege durch beide Spitzen, also durch die Gerade, welche sie verbindet, eine Reihe von Ebenen, deren jede beide Flächen schneidet. Die Durchschnittspunkte der so erhaltenen, in einer Ebene liegenden geraden Durchschnittslinien, sind alsdann Punkte des gesuchten Schnittes und ihre Verbindung gibt den Schnitt selbst. Das ganze Verfahren hat überhaupt mit dem in §. 223. beschriebenen die größte Aehnlichkeit.

Entwickelt können solche konische Flächen sammt den Schnitten nach §. 213. werden.

§. 228. Aufgabe.

Ein gerader Kegel a′b′c′d′, a″c″d″ (Fig. 71.) und ein schiefer Cylinder f′g′k′i′, f″h″m″n″, dessen Basis ganz innerhalb der Basis des Kegels liegt, schneiden sich. Die Achsen beider Körper liegen in einer Ebene, die mit der Vertikalebene parallel ist. Man soll den

Schnitt projiciren, beide Flächen entwicklen und eine Tangente an den Durchschnitt ziehen.

1) Projection. Da beide Flächen durch Horizontalebenen, wie z. B. o''p'', in Kreisen wie o's's', o''r'', p'q'p', p''q'' geschnitten werden, die ihre Mittelpunkte in d' und e'l' haben, so ergeben sich die gesuchten Projectionen t's'u's', t''s''u'' durch die Durchschnitte s', s'' einer hinreichenden Anzahl solcher Kreise wie in §. 225. sehr leicht. Es ist klar, daß der eine Theil der Vertikalprojection den andern ganz deckt.

2) Entwickelung. Um den Theil der Kegelfläche zu entwicklen, welcher den Schnitt enthält, ziehe man nur von d' tangirende Linien d'b', d'a' an die Horizontalprojection der Durchschnittscurve, so wird dadurch jener Theil begrenzt. Macht man nun die Länge des mit db = d''c'' beschriebenen Bogens ba gleich der Länge des Bogens b'c'a' und zieht db, da, so ist dba der erwähnte entwickelte Theil der Kegelfläche. Ist auf der mittleren Linie dc, dt = d''t'', du = d''u'', so sind t, u die entwickelten Punkte t', t''; u', u''. Wird ds gleich der wahren Länge von d's', d''s'' gemacht, so entsprechen die Punkte s, s der Entwickelung der Punkten s', s''; s', s'' des Schnittes. Diese wahre Länge ist gleich a''c', wenn a''b' = d's' und b'c' senkrecht auf a''c'' ist. Um irgend einen andern Punkt v', v'' zu developpiren, ziehe man die entsprechende Seite d'x', mache in der Entwickelung den Bogen bx = b'x' und dv auf dx gleich der wahren Länge von d'v', d''v'', die man wieder wie vorhin ds bestimmt. Auf diese Weise wird die Curve tsvus durch einzeln entwickelte Punkte erhalten.

Behufs der Entwickelung eines Theils der Cylinderfläche durchschneide man sie nach Anleitung des §. 211. mit einer Ebene e'f'', senkrecht auf der Achse e'l', e''l'',

und construire den Schnitt, der eine Ellipse ist (§. 128.); ihre Achsen sind gleich e'g' und f''h''. Man kann diese Ellipse auch dadurch erhalten, daß man z. B. die Sehne h'i' gleich der durch k' gehenden Sehne des über m''n'' beschriebenen Halbkreises macht, der durch k' parallel mit der Grundfläche des Cylinders geführt und um seinen Durchmesser m''n'' gedreht ist. Wie hier die Punkte h', i' erhalten wurden, kann man noch mehr Punkte der Ellipse bestimmen, die hier um ihre kleine Achse soweit gedreht erscheint, bis sie mit der Vertikalebene parallel ist. Wird nun ee gleich dem Umfang dieser Ellipse und et = et = e't'' gemacht, so sind t, t Punkte des mit der Cylinderfläche entwickelten Durchschnitts. Die Senkrechte gu in der Mitte von ee ist gleich g'u''. Um noch andere Punkte zu entwicklen, z. B. den Punkt v', v'', macht man gl gleich dem Bogen g'l' der Ellipse, nachdem die Senkrechte v''l' auf g'e' gezogen worden ist; sodann lv = m'v'' und senkrecht auf ee gemacht, gibt den Punkt v ꝛc. Wollte man die Cylinderfläche bis zu ihrem Durchschnitte mit der Horizontalebene entwicklen, so dürfte man nur et und et = e'f'', gu = g'h'', lv = m'w'' ꝛc. machen. Je mehr Punkte wie t, t, u, v man bestimmt, desto genauer wird die Entwickelung.

3) Tangente. Um eine Tangente an einem Punkte des Schnittes, z. B. an v', v'' zu erhalten, legt man durch ihn tangirende Ebenen an beide krumme Flächen (§. 207.). Die Tracen x'y', zy' derselben sind Tangenten in den Punkten x', z der Tracen beider Flächen, in welchen die Berührungselemente dx', vz durch v die Horizontalebene schneiden (§. 186.), und der Durchschnitt y' dieser Tracen ist ein Punkt der gesuchten Tangente, denn er ist ein Punkt, der in beiden tangirenden Ebenen liegt; daher sind y'v', y''v'' die

Projectionen derselben. Um die Tangente in die entwickelte Kegelfläche zu übertragen, entwickle man die Seite dx, welche d'x' entspricht, mache xy senkrecht darauf und gleich x'y', so ist vy die entwickelte Tangente (§. 213). In der Entwickelung der Cylinderfläche erhält man die Tangente vf, wenn man ee, oder die Verlängerung davon aus v mit der wahren Länge desjenigen Theils der Tangente durchschneidet, welcher zwischen dem Berührungspunkt v und ihrem Durchschnitte f', f'' mit der senkrechten Ebene e'f'' liegt. Der Durchschnittspunkt f'' der Vertikalprojection der Tangente mit der Vertikalprojection e''f'' der Ebene ist offenbar die Vertikalprojection des Durchschnitts der Tangente mit der Ebene. In Betreff der wahren Länge dieser Tangente vergleiche die Frage in §. 33.

§. 229. Aufgabe.

Den Durchschnitt zweier Revolutionsflächen, deren Achsen sich schneiden, zu projiciren.

Der Einfachheit wegen ordne man die Projectionsebenen so an, daß die Achse der einen Fläche senkrecht auf der einen, und die Achse der andern parallel mit der andern Projectionsebene ist. Es seien hiernach a', a''b''; a'c', a''c'' (Fig. 72.) die Achsen und d''e''f''g'', e''i''g''h'' die Vertikalprojectionen der Flächen. Man nehme zu Hülfsflächen eine Reihe Kugelflächen an, die ihre Mittelpunkte im Durchschnitt a', a'' der Achsen haben; sie schneiden beide Flächen in Kreisen, deren Ebenen senkrecht auf den betreffenden Achsen sind und die Durchschnitte je zwei solcher Kreise, die in einer und derselben Kugelfläche liegen, gehören dem gesuchten Durchschnitt an, weil sie in beiden krummen Flächen zugleich liegen. Es kommt daher darauf an, diese Kreise oder ihre Durchschnitte zu bestimmen. Da die Kreise senkrecht auf den Achsen und diese parallel mit

der Vertikalebene sind, so sind jene senkrecht auf dieser Ebene, und wenn nun der Kreisbogen d''i''f''h'', aus a'' beschrieben, die Projection des Durchschnittes einer Kugelfläche mit der Achsenebene ist, so sind d''f'', i''h'' die Projectionen der dadurch auf den Revolutionsflächen entstandenen Kreise, und ihr Durchschnitt k'' ist die Vertikalprojection der zwei Punkte, in denen sich die Kreise schneiden. Um die zugehörigen Horizontalprojectionen k', k' zu erhalten, darf man nur die Horizontalprojectionen d'k'k'd' des Kreises df mit d''l aus a' beschreiben und den Punkt k'' darauf führen. Die Grenzpunkte e', e''; g', g'' der Projectionen des Schnitts ergeben sich leicht, und andere Punkte findet man eben so wie die Punkte k', k''; k', k''. Dadurch werden die Projectionen k'g'k'e', g''k''e'' des Durchschnitts der beiden Flächen bestimmt. Die zwei Hälften der Vertikalprojectionen decken sich, weil je zwei Punkte derselben in einem Perpendikel auf der Vertikalebene liegen.

Eine Tangente kann nach §. 207. an den Schnitt gezogen werden.

§. 230.

Diese Beispiele werden hinreichen, um einen Begriff von der Bestimmung des Durchschnitts zweier krummen Flächen zu geben. Man wird sich überzeugt haben, daß diese Bestimmung immer möglich ist, sobald man den Durchschnitt der betreffenden krummen Flächen mittelst einer Reihe von Hülfsflächen zu projiciren im Stande ist. Je einfacher und leichter diese Projectionen construirt werden können, desto einfacher und leichter ist auch der Durchschnitt der krummen Flächen zu bestimmen. Es kommt daher immer darauf an, den jedesmaligen Umständen angemessen, ein

solches System von Hülfsflächen zu wählen, daß ihre Durchschnitte mit den krummen Flächen möglichst leicht zu projiciren sind.

§. 231. Uebungsaufgaben.

1) Den Durchschnitt eines senkrechten oder schiefen Cylinders oder Kegels mit einer Kugel zu bestimmen und die Cylinder- oder Kegelfläche sammt dem Schnitt zu entwickeln.

2) Bei einem Geschütz bilden die beiden Schildzapfenscheiben die Grundflächen eines geraden Cylinders, welcher das konische, cylindrische oder kugelförmige Zapfenstück durchdringt. Die Achsen beider Körper schneiden einander senkrecht, oder es liegt bei dieser Richtung die Zapfenachse um eine gewisse Größe unter der andern. Man soll aus den erforderlichen Dimensionen des Zapfenstücks dasselbe zeichnen.

3) Ein horizontales Tonnengewölbe wird von einem gegen den Horizont geneigten, gewölbten Kellerhals senkrecht oder schief durchschnitten. Der Durchschnitt beider Gewölbe soll construirt werden.

4) Ein konisches Gefäß von Blech ist mit einem cylindrischen oder konischen, horizontal oder aufwärts gerichteten Auslaufrohr versehen. Man soll das Netz des Gefäßes, behufs seiner Anfertigung, construiren.

5) In einem cylindrischen Thurm außerhalb oder innerhalb eine runde, oben kugelförmig geschlossene Nische zu construiren.

Neunter Abschnitt.

Darstellung verschiedener, zum Theil von krummen Flächen begrenzter Körper.

§. 232. Aufgabe.

Einen auf der Horizontalebene liegenden, gegen die Basis geneigten Cylinder a′b′c′d′ (Fig. 73.) auf die Vertikalebene zu projiciren, und ihn in einer gegen die Horizontalebene geneigten Lage darzustellen.

Es kommt darauf an, die Grundflächen a′b′, c′d′ auf die Vertikalebene zu projiciren. Man ziehe a″c″ im Abstande des Halbmessers a′e′ der Grundflächen parallel mit g″h″ und führe a′, b′ darauf, so ist a″b″ die Vertikalprojection des horizontalen, und e″g″ = a′b′ ist die des vertikalen in e′ stehenden Durchmessers und ihm gleich. Man kann nun a″b″, e″g″ als die Achsen einer Ellipse betrachten und diese nach §. 128. construiren. Will man indessen auf eine andere Weise einige Punkte derselben erhalten, so projicire man z. B. die vertikalen Sehnen der Grundfläche, welche die horizontalen Halbmesser halbiren; ihre Horizontalprojectionen sind also i′, k′ in der Mitte von a′e′, e′b′ und ihre Vertikalprojectionen liegen in den Perpendikeln i′i″, k′k″. Um nun die Projectionen der Endpunkte zu erhalten, drehe man den Kreis mit jenen Sehnen um seinen horizontalen Durchmesser und trage die halben Sehnen i′i, k′k von a″c″ aus auf jene Perpendikel auf- und abwärts. Die dadurch entstehenden Punkte i″, i″, k″, k″ sind nun Punkte der Vertikalprojection der Grundfläche. Mit der andern Grundfläche wird eben so verfahren.

Dreht sich der Cylinder aus seiner horizontalen

Lage a'b'c'd' (Fig. 74.) mit einem Ende um den Winkel w so, daß die Achse in derselben Vertikalebene bleibt, so erhält man seine Projectionen auf folgende Art. Man denke sich den Cylinder in eine Vertikalebene durch b'c' projicirt und das dadurch entstehende Rechteck nach b'c'gh umgelegt. Wird dieses Rechteck um den Winkel w gedreht, so kommt es in die Lage b'fik und Perpendikel von b', f, i, k auf die Achse, schneiden darin die Projectionen k'e', i'f' der vor der Drehung vertikal gewesenen Durchmesser ab. Fällt man von k', e', i', f' Senkrechte auf die Basis und trägt auf sie, von dieser aus, die Abstände der Punkte k, i, f von b'c', so werden die Vertikalprojectionen e'', k'', i'', f'' erhalten. Werden von den Mitten m, u von b'k und fi Senkrechte auf e'f' gefällt, so ergeben sich die Projectionen p'p', u'u' der horizontalen Durchmesser. Die Vertikalprojectionen p'', p'', u'', u'' ihrer Endpunkte werden erhalten, wenn man von p', p', u', u' Senkrechte auf die Basis zieht und auf sie, von dieser Linie aus, wie vorhin, die Abstände mp', uu' der Punkte m, u von b'c' trägt. Macht man l'o' = lo, n'q' = nq und verfährt mit o', q' eben so wie mit p', p', so ergeben sich die Projectionen von noch mehr Punkten der einen Grundfläche. Mit der andern wird auf eine ähnliche Art verfahren.

§. 233. Aufgabe.

Ein gerader auf der Horizontalebene stehender Kegel a'b'c'd', a''c''d'' (Fig. 75.) wird so auf diese Ebene umgelegt, daß seine Spitze in die gegen die Basis geneigte Linie d'd' fällt. Man soll den Kegel in dieser Lage projiciren.

Da sich der Kegel um den Punkt e' dreht und mit der Seite de' in d'd' niederlegt, so mache man e'd' =

d''c''. Um die Grundfläche zu projiciren, denke man sich den liegenden Kegel in eine mit seiner Achse parallele Vertikalebene durch b'e projicirt und diese Projection nach efg umgelegt. Nun verfahre man mit der Grundfläche ganz wie im vorigen §.; dieses Alles wird auch durch die Zeichnung klar. Obgleich der Punkt g'' der höchste ist, so ist doch die Gerade d''g'' kein Theil der Contour der Projection, sondern die Tangente d''h an der Projection der Grundfläche. Jenes würde der Fall sein, wenn die Achse des Kegels mit der Vertikalebene parallel wäre.

§. 234. Aufgabe.

Den abgestutzten Kegel a'b'c'd'e'f', a''c''d''f'' (Fig. 76.) auf eine beliebige Vertikalebene g''h'' zu projiciren oder den Aufriß von einer andern Seite zu zeichnen.

Man fälle von irgend einem Punkte e' der Horizontalprojection eine Senkrechte auf die neue Basis g''h'' und trage von dieser aus die Höhe des Punktes e über der Horizontalebene darauf, so ergibt sich die Projection e'' von e auf der neuen Ebene (§. 27). Diese Höhe ist aber bekanntlich der Senkrechten e''i von e'' auf die Basis gleich. Bestimmt man auf gleiche Weise von noch mehr Punkten die Projectionen auf der neuen Ebene, so ergibt sich die Projection e''k''l'' der oberen Fläche des Kegels und wenn daran von g'' und h'' Tangenten gezogen werden, die Projection des abgestutzten Kegels.

§. 235. Zusatz.

Ganz auf dieselbe Art kann jeder Gegenstand aus seinen gewöhnlichen Projectionen auf jede beliebige Vertikalebene projicirt, oder von einer andern Seite betrachtet, dargestellt werden.

236. Aufgabe.

Eine Revolutionsfläche, deren Achse a'b', a''b'' (Fig. 77 a.) mit der Vertikalebene parallel und gegen die Horizontalebene geneigt ist, auf diese Ebene zu projiciren.

Es sei c''d''e''f'' ... die Erzeugungscurve. Man durchschneide die Achse mit einer auf ihr, mithin auch auf der Vertikalebene senkrechten Ebene. Dieß geschieht in einem Kreise, dessen Vertikalprojection d''h'' und dessen Horizontalprojection eine Ellipse d'i'h'i' ist. Die kleine Achse derselben ist d'h', die große ist gleich d''h''. Man projicire eine hinreichende Anzahl solcher Kreise, und ziehe zuletzt eine Curve e'g'i'm'k', welche alle Ellipsen berührt, so ist sie die Contour der gesuchten Projection. Die äußersten Ellipsen wie e'g'f'g', e''f'' werden durch Linien wie e'e'' bestimmt, welche senkrecht auf der Basis sind und die Erzeugungscurve berühren. Die Ellipsen kann man auf eine ähnliche Art, wie die Projectionen der Kreise in §. 232 erhalten.

§. 237. Aufgabe.

Eine Schraube zu zeichnen.

Es sei a'b', a''b''c''d'' (Fig. 78.) ein Rechteck, dessen eine Seite b', b''c'' sich in einer Seite des geraden Cylinders A', A'' befindet, und welches mit der Achse e', e''f'' dieses Cylinders in einer Ebene liegt. Bewegt sich nun das Rechteck auf der Cylinderfläche so, daß seine Seite b', b''c'' stets in einer Seite des Cylinders, das Rechteck selbst aber mit der Achse in einer Ebene bleibt und daß irgend ein Punkt b', b'' desselben auf der Cylinderfläche eine Schraubenlinie beschreibt (§. 152 2c.), so nennt man den Cylinder und den Körper, welchen das Rechteck erzeugt, eine Schraube. Alle Punkte des Rechtecks erzeugen bei dieser Bewe-

gung Schraubenlinien; z. B. die Punkte a′, a″; a′, d″ beschreiben zwei dergleichen auf einem Cylinder, dessen Halbmesser a′e′ ist. Da die Punkte a″ und d″, so wie b″ und c″, immer dieselbe Entfernung von einander behalten, und sich in einer mit der Vertikalebene parallelen Geraden befinden, so sind die von diesen vier Punkten erzeugten Schraubenlinien auf den zugehörigen Cylinderflächen parallel. Hat man also die Schraubengänge b″g″i″, a″h″k″ nach §. 154 von einerlei Höhe gezeichnet, so darf man nur in der vertikalen Entfernung a″d″ von ihnen parallele Schraubenlinien führen, und bei den folgenden Schraubengängen nur parallele Linien mit den Linien des ersten Schraubenganges auf die Entfernung der Höhe desselben ziehen. Da übrigens der unsichtbare oder hintere Theil der Schraube ganz wie der vordere ist, so führt man ihn gar nicht aus. Linien wie mn gehören mehreren auf einander folgenden Lagen des Rechtecks an, und können zur vollkommneren Darstellung der Schraube beitragen. Die obere und untere Fläche des Schraubengangs sind, wie bereits §. 170 erwähnt wurde, windschiefe Flächen, denn sie werden durch eine Gerade, nämlich durch den verlängerten Halbmesser, erzeugt, die sich an einer Geraden, der Cylinderachse, und einer Curve, der Schraubenlinie, so fortbewegt, daß sie beständig mit der Horizontalebene parallel bleibt.

§. 238. Zusatz.

Bewegt sich statt des Rechtecks ein Dreieck unter denselben Voraussetzungen, so sieht man leicht ein, daß jede der drei Spitzen des Dreiecks eine Schraubenlinie beschreibt, und daß sich zwei dieser Linien auf der inneren und die dritte auf einer äußern Cylinderfläche befinden. Die Seite des Dreiecks, welche in der inne-

ren Cylinderfläche liegt, ist bei solchen Schrauben meistens zugleich die Höhe der Schraubengänge; hierdurch bewegt sich der untere Punkt des Dreiecks beim zweiten Schraubengaug auf der Schraubenlinie, welche der oberste Punkt des Dreiecks beim ersten Gange erzeugt hat, und es bleibt also vom inneren Cylinder nichts sichtbar. In der Zeichnung bilden die Projectionen des Dreiecks, wenn es mit der Vertikalebene parallel ist, keine gerade Theile der Contour der Zeichnung, weil der von dem äußeren Punkte in dieser Gegend beschriebene Bogen jene Lagen zum Theil deckt. An diese Bogen werden deßhalb die geraden Grenzen rechts und links tangirend gezogen. Hiernach wird man im Stande sein, eine solche Schraube zu zeichnen.

§. 239. Aufgabe.

Eine Schraubenlinie auf einen geraden Kegel zu zeichnen.

Es lassen sich bei dieser Aufgabe zwei Fälle unterscheiden. Entweder sollen die Schraubengänge gleiche Höhe, oder die Schraubenlinie soll einerlei Fall haben, d. h. die Seitenlinien des Kegels unter gleichen Winkeln schneiden. Im ersten Falle wird die Schraubenlinie nach der Spitze des Kegels immer steiler und steiler, weil für dieselbe Erhebung der Weg der Schraubenlinie kürzer ist; im andern Fall nimmt die Höhe der Schraubengänge nach der Spitze zu ab, weil sich die Schraubenlinie bei gleichförmiger Erhebung auf einem kürzeren Wege weniger erhebt.

1r Fall. Ist d12 (Fig. 77b.) die Höhe des Schraubengangs auf der Achse des geraden Kegels gemessen, so theile man diese Linie und den Umfang der Basis in eine gewisse Anzahl gleiche Theile, z. B. in 12 (je mehr, desto besser), und ziehe von den Thei-

lungspunkten in d 12 Parallellinien mit der Basis, bis sie die Projectionen der Seiten des Kegels schneiden, welche gleichen Theilungspunkten der Basis entsprechen. Dadurch werden einzelne Punkte des Schraubengangs erhalten, die man nur gehörig zu verbinden braucht. Die Horizontalprojection ergibt sich leicht durch Perpendikel von Punkten der Vertikalprojection auf die Basis. Man erhält sie jedoch richtiger, wenn man a'e' in 12 gleiche Theile theilt und der Reihe nach einen, zwei, drei . . . derselben auf die Radien 1'c', 2'c', 3'c' . . . von 1', 2', 3' . . . anträgt, und die so erhaltenen Punkte gehörig verbindet. — In der entwickelten Kegelfläche haben zwei entwickelte Schraubengänge auf allen Seiten der Kegelfläche einerlei Entfernung, weßhalb es leicht ist, einen zweiten Gang zu entwickeln.

2r Fall. Es sei Fig. 77 c. die entwickelte Kegelfläche und c die Höhe des ersten Schraubengangs auf der Seite des Kegels gemessen. Man theile mn in eine Anzahl gleiche Theile, die eine Potenz von der Zahl 2 ist, z. B. in 4 und ziehe die zugehörigen Seiten der Kegelfläche. Hierdurch werden die Winkel y einander gleich. Da nun wegen des gleichförmigen Falls der Schraubenlinie auch die Winkel x gleich sein sollen, so müssen die Dreiecke 1, 2, 3, 4 und ebenso die Dreiecke (1 + 2), (3 + 4) ähnlich sein. Man hat daher $a : d = d : b$, woraus d folgt. Hierauf: $a : e = e : d$ und $d : f = f : b$, wodurch sich e und f ergeben. Es sind daher nur mittlere Proportionallinien d, e, f zwischen a und b, a und d, d und b zu suchen, von der Spitze der Entwicklung auf die entwickelten Seiten zu tragen und ihre Endpunkte gehörig zu verbinden. Bestimmt man noch mittlere Proportionallinien zwischen a und e, e und d rc., so wird

der entwickelte Schraubengang genauer. Hieraus läßt sich nun der Kegel mit dem Schraubengange zeichnen. Auch wird man im Stande sein, eine konische Schraube darzustellen.

§. 240.

Mit diesen wenigen Beispielen glaubt der Verfasser diesen Abschnitt beschließen zu können, weil er der Meinung ist, daß Jemand, der nach diesem und dem vierten Abschnitte die gewöhnlichen geometrischen Körper darzustellen weiß und sich überhaupt das Bisherige angeeignet hat, sich um so mehr in andern Fällen zu helfen wissen wird, als die meisten andern Körper als aus jenen zusammengesetzt betrachtet werden können.

Zehnter Abschnitt.

Anwendung der Constructionslehre auf die Auflösung einiger Aufgaben.

§. 241. Aufgabe.

Den Mittelpunkt einer Kugelfläche zu finden, welche durch vier gegebene Punkte geht, oder um eine dreieckige Pyramide eine Kugel zu beschreiben.

Jede Kante der Pyramide kann als Sehne der Kugelfläche betrachtet werden, und eine Ebene durch die Mitte einer Sehne senkrecht darauf geführt, geht durch das Centrum der Kugel. Man lege also durch die Mitte der drei Kanten einer Ecke der Pyramide nach §. 66. senkrechte Ebenen und bestimme deren Durchschnitte (§. 61). Der Punkt, in welchem sich alle drei schneiden, ist der gesuchte.

Diese Auflösung läßt sich sehr vereinfachen, wenn man die Projectionsebenen so annimmt, daß die horizontale durch drei der gegebenen Punkte geht, und die vertikale mit einer nach der Spitze gehenden Kante parallel ist. Man kann auch die Pyramide zuerst um die Horizontaltrace ihrer Grundfläche nach Anleitung des vierten Abschnittes so weit drehen, bis sie auf der Horizontalebene steht, und dann läßt sich das eben angedeutete kürzere Verfahren leicht anwenden.

§. 242. Aufgabe.

Einen Punkt zu finden, der von vier Ebenen gleichen Abstand hat, oder eine Kugel in eine dreieckige Pyramide zu beschreiben.

Da jeder Punkt einer Ebene, welche durch den Durchschnitt zweier Ebenen gelegt ist und deren Flächenwinkel halbirt, von diesen beiden Ebenen gleichen Abstand hat, so wird ein Punkt, der in den drei Ebenen zugleich liegt, welche die von der Grundfläche und den Seitenflächen der Pyramide gebildeten Winkel, oder welche überhaupt drei Flächenwinkel der Pyramide halbiren, der gesuchte Punkt sein. Man suche daher nur den gemeinschaftlichen Punkt solcher drei Ebenen, d. i. den Durchschnitt zweier ihrer Durchschnittslinien. Nachdem man nämlich die Winkel wie in §. 31 gesucht und halbirt hat, so ist es leicht, die Halbirungsebenen zu legen; denn wenn man die drei Winkel wählt, welche die Grundfläche mit den Seitenflächen macht, vorausgesetzt, daß die Pyramide auf der Horizontalebene steht, so sind die Seiten der Grundfläche selbst die Horizontaltracen; durch sie ergeben sich Punkte der Vertikaltracen, und andere Punkte derselben sind die Durchschnitte der Vertikalebene mit den Geraden, welche die betreffenden Flächenwinkel halbi-

ren. Die Durchschnitte der Halbirungsebenen werden sodann nach §. 61 bestimmt. Die Auflösung wird bei dieser Lage der Pyramide noch sehr vereinfacht, wenn man die Vertikalebene so annimmt, daß die Basis auf der Richtung einer Seite der Grundfläche senkrecht ist. Will man die Berührungspunkte der Kugel mit den Seitenflächen der Pyramide haben, so darf man nur vom gefundenen Mittelpunkte auf diese Flächen Perpendikel fällen (§. 64), und ihre Durchschnitte mit denselben suchen (§. 55). Die wahren Längen dieser Perpendikel bis zu ihren Durchschnitten mit den Seitenflächen müssen einander und zugleich dem Abstande der Vertikalprojection des Centrums von der Basis gleich sein, denn sie sind nichts anders, als Halbmesser der Kugel, und diese sind jenem Abstande gleich.

§. 243. Aufgabe.

Die Projectionen eines Punktes k (Fig. 79) zu finden, dessen Entfernungen von drei andern Punkten a, b, c bekannt sind, oder mit andern Worten: Aus der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide und den Längen der drei Seiten, die Pyramide zu zeichnen.

In Bezug auf jeden der drei Punkte liegt der gesuchte Punkt in einer Kugelfläche, deren Halbmesser der Entfernung des gesuchten Punktes von dem betreffenden gegebenen Punkte gleich ist, mithin befindet er sich, in Beziehung auf zwei Punkte, im Durchschnitte der entsprechenden zwei Kugelflächen, und in Bezug auf drei Punkte, im Durchschnitte der drei Kugelflächen, welche die betreffenden Entfernungen zu Halbmesser haben. Um nun diesen Punkt zu finden, nehme man, der Einfachheit wegen, die Ebene der drei Punkte zur horizontalen Projectionsebene an. Es seien a′, b′, c′ diese Punkte. Man beschreibe mit den gegebe-

nen Entfernungen aus ihnen Kreise, so sind diese die Horizontalprojectionen oder Tracen der erwähnten Kugelflächen. Je zwei dieser Kugelflächen schneiden sich in einem Kreise, dessen Ebene auf der Geraden zwischen beiden Mittelpunkten senkrecht ist, und da hier diese Geraden in der Horizontalebene liegen, so sind die Projectionen jener Kreise gerade Linien, die auf a′b′, a′c′, b′c′ senkrecht sind. Diese Kreise haben die gemeinschaftliche Sehne zweier größten Kreise je zweier Kugelflächen zu Durchmessern. Da nun die in der Horizontalebene gezeichneten Kreise solche größte Kreise sind, so sind de, fg, hi die Projectionen der Durchschnitte je zweier Kugelflächen, mithin ist der ihnen gemeinschaftliche Punkt k′ die Horizontalprojection des gesuchten Punktes. Um seine Vertikalprojection zu finden, drehe man einen der Durchschnitte, z. B. de, um seinen Durchmesser de in die Horizontalebene, oder zeichne nur einen Kreis um de als Durchmesser, so ist die darauf senkrechte Sehne k′k die Höhe des Punktes über der Horizontalebene und also auch der Abstand der Vertikalprojection k″ von der Basis.

Statt die drei Punkte in der Horizontalebene anzunehmen, kann man auch die durch sie bestimmte Ebene in jene umlegen (§. 42), sodann verfahren, wie so eben gesagt wurde, und endlich die Ebene sammt dem gefundenen Punkt in ihre vorige Lage zurückdrehen (§. 45).

Auch auf folgende leicht begreifliche Art kann die Aufgabe aufgelös't werden, wenn die Punkte in der Horizontalebene liegen, oder dahin geführt worden sind. Es seien a, b, c (Fig. 80 a.) die drei Punkte und ad, bd, cf die drei zugehörigen Abstände. Denkt man sich aus ad und bd über ab das Dreieck abd construirt, und um ab beweglich, so beschreibt die Spitze d mit

der Senkrechten de auf ab als Radius einen Kreis, in welchem, wie leicht einzusehen ist, der gesuchte Punkt liegt. Es kommt also noch darauf an, denjenigen Punkt dieses Kreises zu finden, der die Entfernung cf von c hat. Zu dem Ende lege man den Kreis nach dhi um, indem man diesen Bogen mit ed aus e beschreibt, durchschneide hierauf ed mit cf aus c in f und mache cg senkrecht auf ed, so ist der Durchschnitt h des mit gf aus g beschriebenen Bogens fh der gesuchte umgelegte Punkt, wie man leicht einsieht, wenn man sich beide Kreise senkrecht aufgerichtet denkt. Macht man noch hk senkrecht auf eg, so ist k die Horizontalprojection des gesuchten Punktes und hk seine Höhe über der Horizontalebene.

Sehr leicht ist endlich folgende Auflösung. Ist abc, Fig. 80 b. die Grundfläche der Pyramide und sind ad, bd, cd die drei Kanten, so stellt diese Figur das leicht zu zeichnende Netz der Pyramide vor. Denkt man sich die drei Seitenflächen in die Höhe gedreht, bis sich die Punkte d, d, d vereinigen, so geschieht dieß in einem Punkte, dessen Projection d′ sich durch die auf ab, bc senkrechten Linien dd′, dd′ ergibt. Construirt man aus de als Hypotenuse und d′e als Cathete ein rechtwinkeliges Dreieck, so ist dessen andere Cathete die Höhe der Pyramide.

§. 244. Aufgabe.

Es sind drei Kugeln und der Halbmesser einer vierten Kugel gegeben, man soll diese in derjenigen Lage projiciren, in welcher sie jene drei Kugeln zugleich berührt, vorausgesetzt, daß es möglich ist.

Das Centrum der vierten Kugel ist offenbar um den Halbmesser jeder andern Kugel plus ihrem eignen Halbmesser von dem Centrum dieser andern Kugel ent-

fernt, denn die Gerade zwischen beiden Mittelpunkten geht durch den Berührungspunkt. Denkt man sich daher drei Hülfskugelflächen, welche die Halbmesser jener Kugeln, vermehrt um den bekannten Halbmesser der vierten Kugel, zu Radien haben, so ist der Durchschnitt dieser drei Kugelflächen der Mittelpunkt der gesuchten Lage der vierten Kugel. Die Aufgabe ist nun auf die vorige zurückgeführt.

Die vierte Kugel kann die drei andern zugleich berühren, wenn sich die drei Hülfskugelflächen wirklich in einem Punkte schneiden. Erreicht aber eine Kugelfläche den Durchschnitt der zwei andern nicht, so kann auch keine gleichzeitige Berührung statt finden.

Die Bestimmung der Berührungspunkte bleibt dem Schüler überlassen.

§. 245. Aufgabe.

Die Grundfläche a′b′c′ (Fig. 81 a.) einer dreiseitigen Pyramide ist in der Horizontalebene nebst den Winkeln gegeben, welche sie mit den drei Seitenflächen bildet. Man soll die Spitze, und somit die Pyramide projiciren.

Da die Seiten der Grundfläche die Horizontaltracen der Seitenflächen sind, so lege man durch sie die Seitenflächen unter den gegebenen Winkeln nach §. 38, und bestimme die Durchschnitte, welche sie mit einander machen. Der Durchschnittspunkt dieser Durchschnittslinien ist die gesuchte Spitze.

Folgender Weg kann auch eingeschlagen werden. Man denke sich die Pyramide durch eine beliebige Horizontalebene k″n geschnitten; die Durchschnittspunkte der dadurch mit den Seitenflächen entstehenden horizontalen Durchschnittslinien sind Punkte der gesuchten

Kanten, welche alsdann durch sie und a′, b′, c′ gezogen werden. Die Projectionen dieser horizontalen Durchschnitte werden so erhalten. Man mache z. B. de senkrecht auf a′b′, den Winkel edf gleich dem gegebenen hierher gehörigen Winkel, sodann dh = k″m, hf parallel mit de, und fg durch den Durchschnitt f von hf und df parallel mit a′b′, so ist fg die Projection der Horizontallinie, welche sich in der Höhe k″m in der durch a′b′ zu legenden Seitenfläche befindet. Dieß sieht man leicht ein, wenn man sich den Flächenwinkel edf senkrecht auf der Horizontalebene aufgerichtet denkt. Eben so werden Horizontallinien gi, k′i in den andern Seitenflächen gezogen. Dadurch entstehen die Projectionen g, i, k′ von Punkten der Kanten; mithin sind die Geraden a′k′, b′g, c′i die Horizontalprojectionen dieser Kanten und ihr Durchschnitt l′ ist die Projection der gesuchten Spitze. Um die Vertikalprojection l″ zu erhalten, ziehe man nur das Perpendikel l′l″ auf die Basis; sein Durchschnitt mit der durch a″ und k″ gezogenen Projection der Kante a″l ist die Projection der Spitze.

Zur Bestimmung des Punktes l′ reichen zwei Horizontallinien hin; aber die dritte kann zur Prüfung der Zeichnung dienen, indem sie durch denselben Punkt gehen muß.

Liegt die gegebene Grundfläche nicht in der Horizontalebene, so kann man entweder die Seitenflächen nach §. 70 bestimmen, oder besser die Grundfläche in die Horizontalebene umlegen, hier die Pyramide, wie so eben, construiren und dann nach §. 98 die Grundfläche sammt der Pyramide in die erste Lage zurückführen.

§. 246. Aufgabe.

Es ist die Größe eines Winkels im Raume, seine Horizontalprojection und die Neigung eines seiner Schenkel gegen die Horizontalebene gegeben. Man soll die Neigung des andern Schenkels gegen diese Ebene finden.

Der Einfachheit wegen nehme man den bekannten Schenkel ab, Fig. 81 b. unter der bekannten Neigung bad in der Vertikalebene an. Es sei nun abc der in diese Ebene um ab umgelegte, der Größe nach bekannte Winkel im Raume und adf seine Projection. Man denke sich a als die Spitze eines auf der Ebene bdf senkrechten geraden Kegels, dessen Seite ac ist, so wird dieser Kegel von bdf in einem Kreise geschnitten, dessen Projection und Durchmesser ef durch die Durchschnitte e, f bestimmt sind. Der Bogen ef ist aus a mit ac beschrieben. Nun lege man die Ebene bdf sammt dem erwähnten Kreise in die Horizontalebene um, wodurch b nach g und der Kreis nach ehif kommt, durchschneide sodann ehif aus g mit bc in h und i, und ziehe gh, gi, so sind diese Linien umgelegte Lagen des gesuchten Schenkels, der daher die Horizontalebene in k′ und l′ schneidet. Wie man sieht, gibt es hier zwei Lagen des Schenkels, in denen er den Bedingungen entspricht, und je nachdem der aus g beschriebene Bogen den Bogen ehif nur berührt oder nicht erreicht, gibt es nur eine oder gar keine Lage.

§. 247. Aufgabe.

Aus den Projectionen einer Geraden und der Horizontalprojection einer andern, mit ihr auf einen gegebenen Abstand parallelen Geraden, die Vertikalprojection dieser letzteren zu finden.

Man denke sich die gegebene Gerade als die Achse einer Cylinderfläche, welche den gegebenen Abstand zum Halbmesser hat. Projicirt man diese Fläche und bestimmt ihre Durchschnitte mit der durch die gegebene Horizontalprojection der gesuchten Geraden gelegten Vertikalebene, so entsprechen beide Durchschnitte der Aufgabe; denn die Erzeugungslinie der Cylinderfläche ist mit der gegebenen Geraden parallel, und die erwähnte Vertikalebene ist es auch, folglich sind es die Durchschnitte gleichfalls. Die Directionslinie ist ein Kreis vom gegebenen Halbmesser in einer auf der gegebenen Geraden senkrechten Ebene; man muß also diesen Kreis zuerst zu projiciren suchen. Es kann nach §. 81. geschehen, wenn man die Ebene des Kreises mit ihrem Durchschnitt mit der Achse umlegt.

Dieß ist die in §. 71. erwähnte zweite Auflösung dieser Aufgabe.

§. 248. Aufgabe.

Eine Gerade zu bestimmen, die mit zwei andern parallelen Geraden parallel ist und von jeder einen gegebenen Abstand hat.

Die gesuchte Linie ist der Durchschnitt zweier Cylinderflächen, die jene zwei Geraden zu Achsen und die gegebenen Abstände zu Halbmessern haben. Da sich diese Cylinderflächen in zwei Geraden schneiden, so gibt es auch zwei Linien, welche der Forderung genügen. Sie ergeben sich nach §. 221. Die Cylinderflächen können nach Anleitung des vorigen §. projicirt werden. Ist die Summe der gegebenen Abstände der Entfernung der zwei Linien gleich, so berühren sich die Cylinderflächen und die Berührungslinie ist die gesuchte; sie liegt alsdann mit den gegebenen Linien in einer und derselben Ebene. Man kann diese Aufgabe noch leich-

ter auflösen (§. 66), besonders dann, wenn man die Ebene der beiden gegebenen Parallellinien zur horizontalen Projectionsebene nimmt.

§. 249. Aufgabe.

Einen Punkt aus seinen Entfernungen von drei Geraden zu finden.

In Bezug auf jede Gerade liegt der gesuchte Punkt in einer Cylinderfläche, welche die Gerade zur Achse, und die Entfernung des Punktes von dieser Geraden zum Halbmesser hat, mithin muß der Punkt in den drei Cylinderflächen zugleich liegen, also in dem Durchschnittspunkte ihrer Durchschnitte. Construirt man daher die Cylinderflächen wie in den vorhergehenden Aufgaben, und dann ihre Durchschnitte nach §. 221, so ergibt sich der gesuchte Punkt. Durch eine schickliche Annahme der Projectionsebenen kann auch hier die Auflösung vereinfacht werden.

§. 250. Aufgabe.

Eine Kugelfläche zu beschreiben, welche durch drei Punkte geht und zugleich eine gegebene Ebene berührt.

Denkt man sich zwischen den Punkten zwei gerade Linien gezogen und durch die Mitte einer jeden eine Ebene senkrecht auf sie gelegt (§. 66), so ist jede dieser Ebenen, und mithin auch der Durchschnitt A beider der geometrische Ort des gesuchten Centrums. Es kommt daher darauf an, in diesem Durchschnitt einen Punkt zu finden, der von der gegebenen Ebene und den drei Punkten, oder, da diese schon gleichen Abstand von jedem Punkt des Durchschnitts A haben, von einem derselben gleiche Entfernung hat. Denken wir uns zu dem Ende eine parabolische Fläche, welche diesen Punkt zum Brennpunkt und die gegebene Ebene

zur Leitebene hat *); so hat sie die Eigenschaft, daß jeder ihrer Punkte von dieser Ebene und jenem Punkte gleichen Abstand hat; sie ist also der geometrische Ort des gesuchten Mittelpunktes, und da dieser auch in der erwähnten Linie A liegt, so entsprechen ihm die Durchschnitte dieser Linie mit jener parabolischen Fläche. Wenn daher diese Linie nicht parallel mit der Achse der Parabel, also nicht senkrecht auf der zu berührenden Ebene ist, so gibt es zwei Kugelflächen, welche der Aufgabe genügen. Es folgt hieraus, daß der Mittelpunkt der einen Kugelfläche desto entfernter liegt, je mehr sich die Lage der Durchschnittslinie A der senkrechten in Bezug auf die gegebene Ebene nähert. Haben die drei Punkte gleiche Entfernung von der Ebene, so ist die Linie A senkrecht auf dieser Ebene.

Um nun die Mittelpunkte dieser Kugelflächen auch ohne die weitläufige Construction der parabolischen Fläche und ihres Durchschnitts mit der Linie A zu erhalten, schlagen wir folgenden Weg ein. Legen wir durch die Linie A eine Ebene M senkrecht auf die gegebene Ebene, so liegt der unbekannte Berührungspunkt in dem Durchschnitte B beider, und die oben ausgesprochene Forderung in Bezug auf die gegebene Ebene reducirt sich nun auf die Linie B. Denken wir uns ferner die Ebene N durch die Linie A und einen der gegebenen Punkte gelegt, und bis in jene Ebene M um A gedreht, so wird jede Kugelfläche, welche ihr Centrum in der Linie A hat, und durch den erwähnten Punkt in seiner ersten Lage geht, auch noch durch ihn gehen, nachdem er sich auf die angegebene Art in

*) Wenn sich eine Parabel sammt ihrer Leitlinie um ihre Achse dreht, so erzeugt die Parabel eine parabolische Fläche und die Leitlinie erzeugt deren Leitebene.

die Ebene M gedreht hat. Wir haben nun in einer Ebene, nämlich in der Ebene M, in welcher der durch den Berührungspunkt mit der gegebenen Ebene gehende größte Kreis der Kugel liegt, einen Punkt, durch den dieser Kreis geht, und zwei gerade Linien, von denen die eine, nämlich A, den Mittelpunkt desselben enthält, und die andere, nämlich B, von ihm berührt werden muß. Diesen Bedingungen entsprechend ist nun in der Linie A der Mittelpunkt zu suchen. Man lege zu dem Ende die Ebene M sammt dem Punkte und den Linien A und B um ihre Horizontaltrace in die Horizontalebene um, und hier sei nun, auf der Horizontalebene, ab (Fig. 82.) die Linie A, ac die Linie B, bc die Trace der Ebene M und d der Punkt. Da der gesuchte Mittelpunkt in ab liegt, und von ac und d gleichen Abstand haben soll, so ist er der Durchschnitt von ab mit einer Parabel, welche die Gerade ac zur Leitlinie und den Punkt d zum Brennpunkte hat; denn die Parabel hat die Eigenschaft, daß alle ihre Punkte von der Leitlinie und dem Brennpunkte gleichweit entfernt sind (§. 133). Construirt man also nach §. 134 in der Gegend des unbekannten Mittelpunktes einen kleinen Bogen ef der erwähnten Parabel, so ist sein Durchschnitt g mit ab der gesuchte Mittelpunkt und dg ist der Halbmesser. Der sich hieraus ergebende Abstand gh des Punktes g von der Trace bc, um welche die Ebene umgelegt wurde, ist nun die Hypotenuse hi eines rechtwinkeligen Dreiecks hik, dessen spitzer Winkel bei h dem Winkel gleich ist, um den sich die Ebene M bis zu ihrem Zusammenfallen mit der horizontalen Projectionsebene gedreht hat. Durch die Senkrechte ik von i auf gh ergibt sich nun die Horizontalprojection k des Mittelpunktes g der gesuchten Kugel, und ik ist zugleich die Höhe dieses Mittelpunktes über der Horizontalebene.

Die Vertikalprojection ergibt sich daher nun leicht. Da übrigens die Linie ab jenseits b noch einmal von jener Parabel geschnitten wird, so folgt daraus der Mittelpunkt der zweiten Kugel, welche der Forderung genügt.

Die Auflösung dieser Aufgabe wird, bei übrigens genauer Beobachtung des hier angegebenen Verfahrens, sehr vereinfacht, wenn man die von der Kugelfläche zu berührende Ebene zur horizontalen Projectionsebene annimmt, oder vielmehr die zu berührende Ebene in die Horizontalebene umlegt. Alsdann muß man sich aber dabei die drei gegebenen Punkte gleichsam fest mit der umzulegenden Ebene verbunden denken, sie also wie die oberen Ecken der abgekürzten Pyramide in §. 98 behandeln und ihre Projectionen in der neuen Lage angeben. Ist der Mittelpunkt der Kugel gefunden, so kann die gegebene Ebene sammt ihm in ihre vorige Lage leicht zurückgeführt werden.

Da der durch die drei gegebenen Punkte bestimmte Kreis ein größter Kreis der kleinsten Kugelfläche ist, welche durch die drei Punkte gelegt werden kann, so sieht man leicht ein, daß die Auflösung unmöglich wird, wenn der Abstand des Centrums jenes Kreises von der zu berührenden Ebene kleiner, als sein Halbmesser wird, weil dann diese Ebene offenbar schon durch die kleinste Kugelfläche geschnitten wird, welche durch die drei Punkte geführt werden kann.

§. 251. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche anzugeben, welche zwei gegebene Ebenen berührt und zugleich durch einen bekannten Punkt geht.

Eine Ebene, welche den Flächenwinkel beider Ebenen halbirt, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, die beide Ebenen zugleich berühren,

und eine parabolische Fläche, deren Brennpunkt der gegebene Punkt ist, und welche eine der zu berührenden Ebenen zur Leitebene hat, ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Kugelflächen, welche durch jenen Punkt gehen und jene Leitebene berühren. Es folgt hieraus, daß der Durchschnitt gedachter Halbirungsebene mit dieser parabolischen Fläche der gesuchte geometrische Ort ist.

Nimmt man die Leitebene zur Horizontalebene, so ist die Darstellung der parabolischen Fläche sehr einfach, weil alsdann ein horizontaler Kreis als Erzeugungslinie derselben angenommen werden kann.

Wäre noch der Halbmesser der Kugel gegeben, so kann der Aufgabe nur dann genügt werden, wenn es in dem Durchschnitt der Halbirungsebene mit der parabolischen Fläche einen Punkt gibt, dessen Entfernung von dem gegebenen Punkt jenem Halbmesser gleich ist. Dieses kann auf folgende Art untersucht werden. Man sehe den gegebenen Punkt als die Spitze und den Durchschnitt der Halbirungsebene mit der parabolischen Fläche als die Basis einer konischen Fläche an, und suche diese Fläche nach §. 213 oder 214 zu entwicklen. Zu dem Ende lege man vorher die Halbirungsfläche mit der konischen Fläche in die Horizontalebene um. In der Entwicklung durchschneidet man alsdann die entwickelte Basis aus der Spitze mit dem gegebenen Halbmesser. Gibt es keinen Durchschnitt, so kann die Aufgabe in Bezug auf die gegebene Kugel nicht aufgelös't werden; dagegen genügen alle etwaige Durchschnitte der Aufgabe in Beziehung auf die gegebene Kugel.

§. 252. Zusatz.

Soll die Kugelfläche durch zwei Punkte gehen und zwei Ebenen berühren, so muß man noch eine para-

bolische Fläche construiren, welche diesen zweiten Punkt zum Brennpunkt und eine der beiden Ebenen zur Leitebene hat. In Bezug auf diesen Punkt ist alsdann, wie im vorigen §., der Durchschnitt dieser parabolischen Fläche mit der Halbirungsebene des Flächenwinkels der zu berührenden Ebenen, der geometrische Ort des gesuchten Centrums. Da dieser Mittelpunkt nun auch im andern Durchschnitt liegen muß, so entsprechen ihm diejenigen Punkte, welche den Durchschnitten der Halbirungsebene mit beiden parabolischen Flächen gemein sind. Liegt der eine Durchschnitt ganz innerhalb oder ganz außerhalb des anderen, so haben beide keinen gemeinschaftlichen Punkt, und es gibt daher auch keine Kugelfläche, welche der Forderung genügt.

Statt der zweiten parabolischen Fläche kann man auch die Gerade zwischen den zwei Punkten mittelst einer Ebene in der Mitte senkrecht durchschneiden, so sind, wie leicht einzusehen ist, die etwaigen Durchschnittspunkte derselben mit dem Durchschnitt der im vorigen §. erwähnten parabolischen Fläche und der Halbirungsebene die gesuchten Mittelpunkte. Gibt es keine dergleichen Durchschnittspunkte, so kann der Aufgabe nicht genügt werden.

§. 253. Aufgabe.

Den geometrischen Ort des Mittelpunktes einer Kugelfläche anzugeben, welche eine andere Kugelfläche und eine Ebene berühren, und zugleich durch einen gegebenen Punkt gehen soll.

In Bezug auf die zu berührende Ebene und den gegebenen Punkt liegt der gesuchte Mittelpunkt in einer parabolischen Fläche, welche diese Ebene zur Leitebene und den gegebenen Punkt zum Brennpunkt hat. Rücksichtlich der Kugelfläche liegt er aber in einer hyperbolischen Fläche, welche das Centrum der Kugel

und den gegebenen Punkt zu Brennpunkten, den Radius der Kugel aber zur Achse hat. Hiervon überzeugt man sich leicht, wenn man erwägt, daß der Abstand des gesuchten Mittelpunktes vom Mittelpunkt der gegebenen Kugel gleich dem unbekannten Halbmesser plus dem Halbmesser der gegebenen Kugel ist, daß also dieser Halbmesser stets übrig bleiben muß, wenn man den unbekannten Halbmesser von jenem Abstande abzieht. Der geometrische Ort des gesuchten Mittelpunktes ist daher der Durchschnitt der parabolischen und der hyperbolischen Fläche.

§. 254. Zusatz.

Soll die Kugelfläche noch zugleich durch einen zweiten Punkt gehen, so muß ihr Mittelpunkt noch zugleich in einer parabolischen Fläche liegen, welche diesen Punkt zum Brennpunkt und die gegebene Ebene zur Leitebene hat. Wenn daher die im vorigen §. bestimmte Curve diese parabolische Fläche schneidet, so genügen die entstehenden Durchschnitte der Aufgabe. Auch hier kann, wie in §. 252, statt eine zweite parabolische Fläche anzunehmen, die Gerade zwischen den zwei Punkten in der Mitte durch eine Ebene senkrecht geschnitten werden.

§. 255. Aufgabe.

Durch einen außerhalb zweier Ebenen gegebenen Punkt eine Gerade zu ziehen, welche gegen jede dieser Ebenen unter einem gegebenen Winkel geneigt ist.

Man sehe den Punkt als die Spitze eines auf der einen Ebene senkrechten Kegels an, dessen Seite die gegebene Neigung gegen diese Ebene hat. Eben so verfahre man in Bezug auf die andere Ebene. Die Kegelflächen schneiden oder berühren sich, oder erreichen einander gar nicht. Im ersten Falle entsprechen die zwei Durchschnitte, im andern entspricht die Be-

rührungslinie der Aufgabe, im dritten gibt es keine Linie, welche der Forderung genügt.

Nimmt man statt einer der gegebenen Ebenen eine Projectionsebene, oder statt beider beide Projectionsebenen an, so wird die Aufgabe einfacher. S. §. 51.

§. 256. Aufgabe.

Durch einen Punkt eine unter einem gegebenen Winkel gegen die horizontale Projectionsebene geneigte Gerade zu ziehen, welche zugleich mit einer beliebigen Ebene parallel ist.

Man sehe den Punkt als die Spitze eines senkrechten Kegels an, dessen Seite unter dem gegebenen Winkel gegen die Horizontalebene geneigt ist. Wird nun an diesen Kegel parallel mit der gegebenen Ebene eine tangirende Ebene gelegt, so ist die Berührungslinie die gesuchte.

§. 257. Aufgabe.

Eine Wendeltreppe von gegebenen Dimensionen zu zeichnen.

Die vordere Fläche der Stufen ist ein Rechteck, das sich ganz so bewegt, wie das Rechteck, welches in §. 237 den Schraubengang erzeugte. Hiernach ist es nun leicht, die Aufgabe aufzulösen, wenn noch die Höhe des Schraubengangs bestimmt ist. Offenbar müssen aber hier die Schraubengänge eine solche Entfernung von einander haben, daß ein Mensch die Treppe passiren kann, also 6—8 Fuß. Dividirt man diese Höhe durch die Höhe der Stufen, so zeigt der Quotient an, wie viel Stufen auf eine Windung kommen, und in wie viel gleiche Theile also der Kreis, welcher den Grundriß darstellt, getheilt werden muß. Der Durchmesser der Spindel ergibt sich aus der Anzahl der Stufen einer Windung und aus ihrer Breite an

der Spindel, oder wenn die Spindel bekannt ist, ergibt sich die Breite der Stufen an ihr.

§. 258. Aufgabe.

Den Wellbaum einer Stampfmühle zu zeichnen.

Gesetzt, es seien zwölf Stampfer zu heben. Damit die zu überwindende Last möglichst gleichförmig vertheilt und nicht die Maschine in einem Moment alle oder mehrere Stampfer zugleich und im andern keine oder die andern zu heben habe, welches ihr sehr nachtheilig wäre, müssen die Stampfer in gleichen Zwischenräumen nach einander gehoben werden. Dieß geschieht, wenn man den Umfang des Wellbaums in 12 gleiche Theile theilt, die den Theilungspunkten zugehörigen Seitenlinien des Cylinders oder Wellbaums zieht und hierauf auf dem Cylinder einen Schraubengang construirt, dessen Höhe $^{13}/_{12}$ der Entfernung der äussersten Stampfer von einander beträgt. Die Durchschnittspunkte dieses Schraubengangs mit jenen Seitenlinien sind nun die Punkte für die Hebedaumen. Dergleichen Schraubengänge werden gewöhnlich drei in gleichem Abstande von einander angeordnet, so daß also drei auf Schraubengängen befindliche Reihen von Hebedaumen entstehen.

§. 259.

In der Hoffnung, dem denkenden Anfänger durch die Aufgaben dieses Abschnittes einige Anleitung zur Entwerfung und Auflösung neuer Aufgaben gegeben zu haben, wollen wir diesen Abschnitt mit der Bemerkung schließen, daß es nützlich und nothwendig ist, dergleichen Uebungen vorzunehmen; nützlich, weil dadurch die Denkkraft außerordentlich geübt und geschärft wird; nothwendig, weil man sich sonst nicht in den Stand setzt, vorkommende Aufgaben auflösen zu kön-

nen, wenn man sie noch in keinem Buche angetroffen hat. An Aufgaben zur Uebung wird es nicht leicht fehlen; so machen z. B. die Aufgaben §. 241. 242. 244. ꝛc. nur einen Theil derjenigen fünfundzwanzig Aufgaben aus, welche sich zwischen Kugel, Ebene, Kugelfläche und Punkt denken lassen. Man kann z. B. eine gegebene Kugelfläche legen: 1) durch drei Punkte; 2) durch zwei Punkte tangirend an eine Ebene; 3) durch einen Punkt an zwei Ebenen; 4) an drei Ebenen; 5) durch zwei Punkte tangirend an eine Kugelfläche; 6) durch einen Punkt an zwei Kugelflächen; 7) an drei Kugelflächen; 8) an zwei Ebenen und eine Kugelfläche; 9) an eine Ebene und zwei Kugelflächen; 10) durch einen Punkt an eine Ebene und eine Kugelfläche. Eine andere Reihe von Aufgaben entsteht, wenn man die Kugelfläche sucht, welche durch vier Punkte, oder durch drei Punkte und eine Ebene, oder durch drei Punkte und eine Kugelfläche ꝛc. bestimmt wird.

Elfter Abschnitt.

Anwendung der Constructionslehre auf die Bestimmung des Lichtes und des Schattens.

Direction des Lichtes.

§. 260.

Bei geometrischen Zeichnungen berücksichtigt man blos das Sonnenlicht, und nimmt die Sonnen- oder Lichtstrahlen, der großen Entfernung der Sonne wegen, als parallel unter sich an. Ihre Richtung wird durch die Projectionen eines Lichtstrahles gegeben. Ob-

gleich diese Richtung gleichgültig ist, so wird sie doch sehr häufig so angenommen, daß die Horizontalprojection unter 45° gegen die Basis, und der Lichtstrahl unter demselben Winkel gegen die Horizontalebene geneigt ist. Hiernach bestimmt sich die Vertikalprojection sehr leicht. Diese Richtung der Lichtstrahlen gewährt, außer mancher Bequemlichkeit in der Construction der Schatten, noch den Vortheil, daß sich aus der Höhe der Schatten werfenden Gegenstände leicht auf die Größe des Schattens auf einer Horizontalebene, und umgekehrt schließen läßt, denn die Länge des Schattens ist alsdann der Höhe des auf der nämlichen Ebene stehenden Gegenstandes gleich.

Schatten eines Punktes.

§. 261.

Es kann hier natürlich nicht die Rede von einem mathematischen Punkte sein. Wenn sich nun in einem erleuchteten Raume ein undurchsichtiger Punkt befindet, so ist klar, daß der auf diesen Punkt fallende Lichtstrahl seinen Weg nicht fortsetzen kann, und daß da, wo er eine die Lichtstrahlen auffangende Fläche geschnitten haben würde, ein nicht erleuchteter Punkt entsteht. Dieser Punkt heißt der **Schatten** jenes Punktes auf dieser Fläche. Der Schatten eines Punktes auf einer Fläche wird daher leicht gefunden, indem man durch den Punkt einen Lichtstrahl führt, d. h. eine Parallellinie mit der Richtung der Lichtstrahlen nach §. 47. durch ihn zieht, und ihren Durchschnitt mit der Fläche bestimmt, auf welcher der Schatten angegeben werden soll (§. 28. 55. 56. 219.) Dieser Durchschnitt ist alsdann der gesuchte Schatten.

Da außer den Punkten der beiden Projectionsebenen alle Punkte des Raums durch ihre Projectionen

dargestellt werden, so kann auch der Schatten eines Punktes sowohl, als eines andern Gegenstandes, wenn er nicht auf eine dieser Ebenen selbst fällt, nur durch seine Projectionen ausgedrückt werden.

Schatten einer Linie.

§. 262.

Denkt man sich durch alle Punkte einer Geraden Lichtstrahlen geführt, so liegen sie als Parallellinien in einer und derselben Ebene, und der Durchschnitt dieser Ebene mit einer Fläche enthält offenbar die Durchschnitte aller jener Strahlen mit dieser Fläche, d. i. die Schatten aller Punkte der Geraden; er ist mithin der Schatten dieser Geraden selbst. Soll daher der Schatten einer Geraden auf einer Fläche bestimmt werden, so legt man nach §. 74 eine mit der Richtung der Lichtstrahlen parallele Ebene durch sie und bestimmt deren Durchschnitt mit jener Fläche nach §. 61 und dem 8ten Abschnitt. Diese Ebene heißt Schattenebene.

Ist die Gerade mit den Lichtstrahlen parallel, so ist ihr Schatten ein Punkt.

Ist die den Schatten auffangende Fläche eine Ebene, so ist der Schatten einer Geraden auf ihr eine Gerade, und wird daher durch zwei Punkte bestimmt. Zur Bestimmung des Schattens einer begrenzten Geraden auf einer Ebene sucht man demnach blos die Schatten ihrer Endpunkte, und verbindet sie durch eine Gerade, so ist diese der Schatten.

§. 263.

Fällt der Schatten einer Geraden auf zwei Ebenen zugleich, z. B. auf die beiden Projectionsebenen, so stellt er sich auf der Zeichnungsfläche als eine gebrochene Linie dar, vorausgesetzt, die Schattenebene sei nicht

senkrecht auf beiden Projectionsebenen, denn ihr Schatten ist in diesem Falle nichts anders als eine gerade die Basis schneidende Linie. Siehe die Aufgabe §. 269.

§. 264.

Der Schatten einer krummen Linie auf einer Fläche ist die Verbindung der Schatten aller einzelnen Punkte derselben, d. i. der Durchschnitt der den Schatten auffangenden Fläche mit einer cylindrischen Fläche, welche die krumme Linie zur Directionslinie hat, und deren Erzeugungslinie mit den Lichtstrahlen parallel ist. Wie diese Durchschnitte bestimmt werden, lehrt der 8te Abschnitt.

Schatten eines Körpers.

§. 265.

Um den Schatten eines Körpers zu erhalten, den er auf irgend eine Fläche wirft, denke man sich ihn von einer cylindrischen, oder prismatischen Fläche umhüllt und umschlossen, deren gerade Erzeugungslinie mit den Lichtstrahlen parallel ist; der Durchschnitt dieser Umhüllungsfläche mit der den Schatten auffangenden Fläche ist alsdann die Contour des gesuchten Schattens; denn es ist klar, daß alle Lichtstrahlen, welche in das Innere der Umhüllungsfläche fallen, von dem undurchsichtigen Körper aufgefangen werden, und daß demnach derjenige Theil des von der Umhüllungsfläche eingeschlossenen Raumes oder des Schattenkörpers, welcher sich auf der nicht beleuchteten Seite des Schatten werfenden Körpers befindet, des Lichtes beraubt ist und also im Schatten liegt.

Man sieht leicht ein, daß die Berührungslinie der Umhüllungsfläche mit dem Körper die Oberfläche dieses Körpers in zwei Theile theilt, von denen der eine beleuchtet ist, der andere nicht oder im Schatten liegt.

Ein Schatten, der sich, wie dieser, auf dem Körper selbst befindet, heißt Seitenschatten oder der eigne Schatten des Körpers; dagegen heißt der Schatten, den ein Körper auf einen andern Gegenstand wirft, sein Schlagschatten.

§. 266.

Da die Contour des Schlagschattens eigentlich nichts anders ist, als der Schatten der erwähnten Berührungslinie der Umhüllungsfläche, so ist ersichtlich, daß es bei der Construction des Schlagschattens zunächst auf die Bestimmung jener Berührungslinie ankommt, deren Schatten man alsdann nach §. 262. 264. bestimmt. Diese Berührungslinie heißt deßhalb auch Schattenlinie des Körpers. Bei Körpern, die von Ebenen begrenzt werden, ist die Umhüllungsfläche eine prismatische Fläche, und ihre Berührungslinie aus geraden Linien, nämlich den Kanten, welche Schatten werfen, zusammengesetzt. Ueber die Berührungslinie bei runden Körpern siehe §. 199. Bei den von Ebenen begrenzten Körpern erkennt man die Kanten, welche Schatten werfen, meistens leicht; ist man aber ungewiß, so darf man nur die Schatten der zweifelhaften Kanten construiren, und man wird dann aus der Contour des Schattens sehen, von welcher Kante der Schatten ein Theil der Contour ist.

§. 267.

Gehen die Lichtstrahlen nicht von einem Punkte, sondern von einem leuchtenden Körper, z. B. von der Sonne aus, so ist noch der Kernschatten und der Halbschatten zu unterscheiden. Es sei z. B. S, Fig. 83 b., die Sonne und ac ein von ihr beleuchteter Gegenstand, der seinen Schatten auf eine durch ce vorgestellte Ebene wirft. Denkt man sich von a Tan-

genten an S gezogen, so stellen sie die äußersten von der Sonne ausgehenden Lichtstrahlen vor, welche durch a gehen, und es ist leicht ersichtlich, daß in den Raum abd gar keine Lichtstrahlen gelangen können; dieser Raum ist der **Kernschatten**. Punkte der Sonne, welche zwischen g und S liegen, werfen ihr Licht in den Raum daf; es fällt also auf df blos Licht von einem Theil der Sonne, und eben so auf fe, so daß also Theile von de desto mehr Licht erhalten, je weiter sie gegen e zu liegen, und erst von e in der Richtung de weiter können Strahlen von der ganzen Sonne auffallen. Der Raum dae erhält also einiges Licht oder liegt nicht ganz im Schatten, daher er **Halbschatten** genannt wird. Es findet aber, wie leicht begreiflich ist, vom Kernschatten in den Halbschatten, und von diesem in den ganz beleuchteten Raum nur ein allmähliger Uebergang Statt, so daß sich also keine scharfe Grenzen bilden; die beiden Schatten, so wie der Halbschatten und das Licht verwaschen sich gleichsam in einander.

Beleuchtung der Körper.

§. 268.

Je mehr Lichtstrahlen auf eine Fläche fallen, desto mehr ist sie erleuchtet oder desto heller ist sie, unter übrigens gleichen Umständen. Denkt man sich nun ein aus lauter Lichtstrahlen bestehendes Prisma einmal in senkrechter und einmal in schiefer Richtung mittelst Ebenen durchschnitten, so ist klar, daß auf beide Schnitte gleich viel Lichtstrahlen fallen, daß aber der senkrechte Schnitt mehr erleuchtet ist, als der schiefe, weil er kleiner ist, und sich deßhalb dieselbe Lichtquantität nicht in dem Maße ausbreitet, als bei der größeren Fläche oder dem in schiefer Richtung auf die Lichtstrahlen ge-

führten Schnitte. Da nun ein solcher Schnitt desto kleiner wird, je mehr sich seine Lage gegen die Lichtstrahlen der senkrechten Lage nähert, so folgt daraus, daß seine Beleuchtung in der Art von dieser Richtung abhängt, daß sie bei der senkrechten Lage gegen die Lichtstrahlen am stärksten ist, dann aber desto schwächer wird, je mehr er sich von dieser Lage entfernt, d. h. je schiefer er von den Lichtstrahlen getroffen wird, und daß er endlich am dunkelsten erscheint, wenn er mit den Lichtstrahlen parallel ist, also von keinem mehr getroffen werden kann.

§. 269.

Die Bestimmung der am stärksten erleuchteten Stellen bei Körpern, die von Ebenen begrenzt werden, ist nach dem vorigen §. und mit Hülfe von §. 58 keinen Schwierigkeiten unterworfen. Was dagegen von krummen Flächen begrenzte Körper betrifft, so kommt es darauf an, von allen an den krummen Flächen möglichen tangirenden Ebenen diejenigen anzugeben, gegen welche sich die Richtung der Lichtstrahlen der senkrechten Richtung am meisten nähert. Zu dem Ende darf man bei Revolutionsflächen, wozu auch die Cylinder- und Kegelflächen gehören, nur durch die Achse eine Ebene parallel mit der Richtung der Lichtstrahlen führen und an ihren Durchschnitt mit der krummen Fläche eine Tangente ziehen, welche senkrecht auf der Richtung der Lichtstrahlen ist. Eine Ebene durch diese Tangente und senkrecht auf die erwähnte Ebene durch die Achse gelegt, gibt nun durch ihr Berührungselement die gesuchte hellste Stelle. Bei Cylinder- und Kegelflächen ist der erwähnte Durchschnitt der durch die Achse gelegten Ebene mit der krummen Fläche selbst diese am meisten erleuchtete Stelle. Von dieser Stelle aus nimmt die Beleuchtung desto mehr ab, je spitzer

die Einfallswinkel der Lichtstrahlen gegen die Grenzfläche werden. Auch ohne Construction erkennt man indessen bei einiger Fertigkeit schon die hellste Stelle, zumal wenn keine große Genauigkeit verlangt wird.

§. 270.

Da sich näher liegende Gegenstände dem Auge deutlicher darstellen, als entferntere, so werden auch in geometrischen Zeichnungen die näheren Theile lichter gehalten, als die entfernteren, und man ist hierdurch in den Stand gesetzt, vorliegende Gegenstände von weiter rückwärts liegenden zu unterscheiden, wenn sie auch unter gleichen Winkeln von den Lichtstrahlen getroffen werden.

§. 271.

Außer dem Lichte, das von dem leuchtenden Körper unmittelbar ausgeht, gibt es noch ein anderes Licht, nämlich das zurückgeworfene oder Reflexions-Licht. So wird das Licht genannt, welches man auf denjenigen Theilen der Körper wahrnimmt, zu denen die Lichtstrahlen nicht unmittelbar, sondern erst durch Zurückwerfung von andern Gegenständen gelangen. Auf diese Art erleuchtete Stellen, heißen Reflexe. Die auf einer Zeichnung angebrachten Reflexe tragen sehr viel zur deutlichen Darstellung der Gegenstände bei. In Bezug auf ihre Anbringung befolgt man nachstehende allgemeine Regel: Man gibt einer Fläche, welche sich im Schatten befindet, eine Beleuchtung, die derjenigen gerade entgegengesetzt ist, die ihr zukommen würde, wenn sie sich nicht im Schatten befände. Uebrigens ist das Reflexionslicht schwächer als das leuchtende, auch blos im Schatten bemerkbar, und zwar im stärksten Schatten am meisten.

§. 272.

In Bezug auf den Schatten wird noch bemerkt, daß er da am stärksten ist, wo er von Stellen des

Schatten werfenden Körpers herrührt, die am stärksten beleuchtet sind. Im Schatten liegende Gegenstände werden, bei sonst einerlei Farbe, immer matter, als beleuchtete Gegenstände gehalten.

§. 273.

Weiter als es hier geschehen ist, in die Materie über die Beleuchtung der Körper einzugehen, liegt ausserhalb der Grenzen dieses Werkchens, und es wird diese Kürze um so mehr zu rechtfertigen sein, als das schöne Anlegen und Schattiren der Körper eine gewisse Geschicklichkeit erfordert, die nur durch Uebung und durch das Nachahmen guter Muster erworben werden kann, und als es an solchen Mustern nebst dazu gehörigen Erläuterungen nicht fehlt. Uebrigens wird das Gesagte hinreichen, um sich im Zeichnen vor Fehlern hüten zu können, die bei völliger Unkenntniß in dieser Sache so leicht entsteht. Als Muster verdienen die Kupfer zu Burg's Zeichnungslehre sehr empfohlen zu werden. Es sollen nun einige Aufgaben über die Construction des Schattens folgen.

§. 274. Aufgabe.

Den Schatten einer Linie a'b', a''b'' (Fig. 83 a.) zu bestimmen.

Man führe durch ihre Endpunkte Parallellinien ac, bd mit dem Lichtstrahl l', l'' und suche ihre Durchschnitte c', d' mit der Horizontalebene, oder überhaupt mit derjenigen Projectionsebene, welche zuerst von ihnen getroffen wird, so ist die Gerade c'd' zwischen den beiden Durchschnitten, wenn sie in einer Ebene liegen, der gesuchte Schatten.

Liegen aber beide Durchschnitte nicht in einer und derselben Projectionsebene, wie z. B. bei der Linie b'e', b''e'', wo nämlich der durch e', e'' geführte Lichtstrahl in f' einschneidet, so fällt der Schatten auf beide

Projectionsebenen. Hier muß man noch den Schatten c' eines andern Punktes a suchen, um die Richtung des in der einen Ebene liegenden Theils d'g bis zur Basis zu erhalten; nun ist d'gf'' der gesuchte Schatten von be.

Wirft die Linie ab ihren Schatten auf die Ebene mno, so findet man die Projectionen h'i', h''i'' desselben, wenn man die Projectionen h', i', h'', i'' der Durchschnitte der durch a und b geführten Lichtstrahlen, durch eine Gerade mit einander verbindet. Die Linie be wirft nun ihren Schatten theils auf mno, theils auf die Vertikalebene; die Projectionen jenes Theils sind h'k', h''k'' und der auf der Vertikalebene liegende Theil ist f''k''.

Ist die Linie krumm, so verfährt man nach §. 264.

§. 275. Aufgabe.

Auf einem vierseitigen geraden Prisma a'b'c'd', a'd'e''h'' (Fig. 84.), das mit einer Seitenfläche an der Vertikalebene steht, liegt eine viereckige prismatische Platte i'k'l'm', k''l''n''o'', mit einer Ausladung. Man soll den Seitenschatten und Schlagschatten construiren.

In Betreff der Platte sieht man, daß ihre unteren Kanten i'k', o''; k'l', o''n'', die obere l'm', l'' und die vertikale Kante l', l''n'' Schatten werfen. Der Lichtstrahl durch den Punkt k', o'' schneidet die Seitenfläche a'b', e''b'' in p', p'', mithin ist p'' der Schatten des Punktes k', o''. Der Schatten des Punktes i', o'' liegt in o'' selbst, und da die Schattenebene durch die Kante i'k', o'' senkrecht auf der Vertikalebene ist, so ist der Schatten dieser Linie die Gerade o''p''; ein Theil dieses Schattens liegt demnach in der Vertikalebene und der andere, bis nach p'', auf dem Prisma. Um zu sehen, wo der Schatten eine Kante z. B. c',

c''g'' trifft, führt man durch c' eine Parallele c'q' mit der Horizontalprojection des Lichtstrahls; hierdurch ergibt sich der Punkt q', q'' der Kante k'l', o''n'', welcher seinen Schatten r'' auf die Kante c''q'' wirft. Man sieht, daß diese Kante den Seitenschatten begrenzt, weil die Fläche c'd', c''h'' von keinem Lichtstrahl getroffen wird. Die vertikale Kante durch c' bis zum Punkt r'' wirft den Schatten c'st, von welchem aber der Theil zwischen d' und c's in der Zeichnung nicht gesehen werden kann, weil er durch die Platte bedeckt ist. Die Kante l'm', l'' wirft den Schatten l''w, und die Kante l', l''n'' den Schatten vw. Der Schatten in der Kante durch b' wird gerade wie der Punkt r'' bestimmt.

§. 276.

Liegt die prismatische Platte auf einem Cylinder (Fig. 85.), so verfährt man wie vorhin, nur muß die krumme Schattengrenze ab durch einzelne Schattenpunkte bestimmt werden. Dieß geschieht, indem man in der Kante c'd', c''d'' mehrere Punkte annimmt. Die den Halbkreis berührende Projection eines Lichtstrahls bestimmt die Grenze e''b des Selbstschattens. Da die Strahlen in der Ebene durch die Achse die Cylinderfläche am directesten treffen, so ergibt sich die am meisten erleuchtete Seite f', f''g'', wenn man durch das Centrum des Kreises eine Parallele mit der Horizontalprojection der Lichtstrahlen zieht.

§. 277.

Ist auch die Platte ein Cylinder (Fig. 86.), so führt man durch einzelne Punkte a, b, c . . . derselben Lichtstrahlen, und bestimmt ihre Durchschnitte mit der Cylinderfläche und der Vertikalebene. Von g bis zum Berührungspunkt f eines tangirenden Lichtstrahls wirft die untere Kante gf der Platte und von da an ihre

obere den Schatten. Von diesem letzten Theil ist der Bogen hi der Schatten, und vom Theil dk ist er kl; dem Bogen ga entspricht der kleine Bogen gm auf der Vertikalebene als Schatten.

§. 278. Aufgabe.

Man soll den Schatten construiren, welchen der auf dem hohlen Halbcylinder a'c', b''f'' (Fig. 87 a.) liegende Balken a'f', a''f'' in das Innere des Cylinders wirft.

Führt man durch die Punkte g', h'' Parallellinien g'i', h''k'' mit den Projectionen eines Lichtstrahls, so ergibt sich die Linie i''k'' als Schatten der Kante g', g''h''. In Betreff des Balkens überzeugt man sich leicht, daß von seinen vorderen Kanten die untere, und von den hinteren die obere Schatten werfen oder die Schattenlinien sind. Man suche daher die Schatten einer Reihe von Punkten dieser Kanten und verbinde sie gehörig mit einander. So ist z. B. l der Schatten vom Punkt m', m'' der vordern untern, und n der Schatten vom Punkt o', o'' der hintern oberen Kante.

§. 279. Aufgabe.

Den Schatten einer Nische zu construiren.

Es sei der Halbkreis a'bc', Fig. 87 b., der Grund- und ea''mf der Aufriß einer halbcylinderförmigen Nische, welche mit einer Viertelskugelfläche gedeckt ist. l'a', l''a'' sei die Direction des Lichts. Die Schattengrenze ik ergibt sich, wie in der vorigen Aufgabe. Um den Schatten zu finden, den irgend ein Punkt d', d'' der halbkreisförmigen Kante der Nische in das Innere wirft, verfährt man auf folgende Art. Man führt einen Lichtstrahl d'h', d''h'' durch den Punkt, und denkt sich eine Vertikalebene durch ihn gelegt, so schneidet sie den kugelförmigen Theil der Nische in einem Kreisbogen

vom Durchmesser gb, der in bhd umgelegt erscheint. Der mit umgelegte Lichtstrahl kommt nach dh und schneidet den umgelegten Schattenpunkt h in bhd ab. Bei der Aufstellung ergibt sich h′ als Horizontalprojection des gesuchten Schattens, und dann durch die Senkrechte h′h″ auf ef der Schatten h″ selbst in d″h″. Legt man, was leicht ist, den Lichtstrahl durch a′a″ nach a′l um, so hat man nur nöthig, durch den umgelegten Punkt d eine Parallellinie mit a′l zu ziehen, weil alle umgelegten Lichtstrahlen parallel sind. Andere Punkte der Schattengrenze kh″m werden ganz wie der Punkt h″ bestimmt. Bei dem letzten Punkte m schneidet der umgelegte Lichtstrahl den umgelegten Kreisbogen nicht, sondern berührt ihn blos.

§. 280. Aufgabe.

Den Schatten einer auf der Horizontalebene liegenden Kugel zu construiren (Fig. 88.).

Nach §. 266 muß zuerst die Berührungslinie einer die Kugel umhüllenden Cylinderfläche bestimmt werden, deren gerade Erzeugungslinie mit den Lichtstrahlen parallel ist. Diese Berührungslinie ist hier offenbar ein größter Kreis, dessen Ebene auf der Richtung der Lichtstrahlen senkrecht ist. Man führe daher nach §. 66 durch den Mittelpunkt eine solche Ebene abc′ und bestimme ihren Durchschnitt c′d′e′f′, c″d″e″f″ mit der Kugel. Dieß kann nach §. 217, oder auch so geschehen, daß man die Ebene um ihre Horizontaltrace mit dem darin bestimmten Mittelpunkt umlegt, den Kreis zeichnet, die Ebene wieder zurückführt und die Projectionen des Kreises nach §. 80. 81. bestimmt. Hierauf führt man durch eine hinreichende Anzahl Punkte dieses Schnittes Parallellinien mit den Lichtstrahlen und bestimmt ihre Durchschnitte mit derjenigen Projectionsebene, welche sie zuerst schneiden. Hierdurch ergibt sich

der Schlagschatten der Kugel. Jener größte Kreis ist zugleich die Grenze des eignen Schattens.

§. 281. Aufgabe.

Den Schatten im Inneren einer hohlen Halbkugel und den Schlagschatten derselben auf der Horizontalebene zu bestimmen. (Fig. 89.)

Um die Auflösung zu erleichtern, errichte man eine neue Vertikalebene vw parallel mit den Lichtstrahlen. Ihre Basis ist also mit der Horizontalprojection a′b′ eines Lichtstrahls parallel. In diese neue Ebene projicire man die Halbkugel und einen Lichtstrahl aus seinen gewöhnlichen Projectionen. a″b″ sei die Projection eines Lichtstrahls. Denkt man sich nun die Halbkugel durch lauter Vertikalebenen parallel mit vw geschnitten, so geschieht dieß in Halbkreisen, deren Vertikalprojectionen ihnen gleich sind. Der Punkt a′, a″ wirft seinen Schatten nach b′, wie die Construction zeigt. Ein anderer Punkt c′ der inneren Schattencontour wird erhalten, indem man c′d′ parallel mit a′b′ zieht, die Kreise d′e′, f′g′ in d″e″, f″g″ projicirt, durch f″ eine Parallele mit a″b″ zieht und ihren Durchschnitt c″ mit f″g″ nach c′ führt. Auf diese Weise wird die Schattengrenze c′b′h′ erhalten.

Den Schlagschatten kann man auf folgende Art construiren. Da der Halbkreis i′e′k′, welcher seinen Schatten auf die Horizontalebene wirft, mit dieser Ebene parallel ist, so ist auch sein Schatten ein Halbkreis vom nämlichen Halbmesser. Man beschreibe daher aus dem Schattenpunkt w′ des Centrums mit dem Halbmesser der Kugel den Halbkreis lmn, so ist dieser die Contour des Schattens, soweit er durch den Kreis i′e′k′ entsteht. Um den Theil des Schattens zu erhalten, der von der Kugelfläche geworfen wird, ziehe man an die Vertikalprojectionen der äußeren Kreise

jener Schnitte tangirende Parallellinien op'', q''r mit a''b'' und führe ihre Durchschnitte p'', q'' mit der Basis auf die entsprechenden Projectionen a'b', d'e' der Schnitte nach p', q'. Auf gleiche Art erhält man noch mehr solcher Punkte und durch ihre Verbindung den Theil lq'p'n des Schattens. Die Projectionen i't's'k', u''s'' der Schattenlinie auf der Kugelfläche ergibt sich durch die Berührungspunkte jener Parallellinien wie op'', q''r.

§. 282. Aufgabe.

Den Schlagschatten zu construiren, welchen irgend eine Vertikalebene auf einen horizontalen prismatischen Körper wirft.

Es sei abcdef, Fig. 89 b, der umgelegte, senkrecht auf die Kanten des prismatischen Körpers aghf geführte Durchschnitt dieses Körpers, auf welchen das aufgestellt gedachte Rechteck iklf seinen Schatten wirft. Die Lichtstrahlen sollen mit der Vertikalebene parallel sein; km ist die Basis, no die Vertikalprojection der Schattenebene, also aller Lichtstrahlen und die Linien p, q sind die Projectionen der Kanten, in denen sich die verschiedenen Flächen des Körpers schneiden. Die Figur zeigt deutlich, wie einzelne Punkte der Schattengrenze gefunden werden, und wie daher diese ganze Grenze bestimmt wird. Ähnlich verhält es sich auf der rechten Seite der Figur, wo rstu die umgelegte Gestalt der schattenwerfenden Vertikalebene ist.

Sind die Lichtstrahlen nicht mit der Vertikalebene parallel, so projicirt man, wie im vorigen §., den Körper vorher auf eine mit den Lichtstrahlen parallele Vertikalebene.

§. 283. Aufgabe.

Die Grenzen des eignen Schattens eines auf der Ho-

rizontalebene liegenden Rings a'b'c'd', h''i'' (Fig. 90.) zu bestimmen.

Die Oberfläche eines solchen Rings ist eine Revolutionsfläche, welche von einem Kreise, dessen Durchmesser ae' ist, erzeugt wird, indem er sich, seinen Mittelpunkt beständig in einem Horizontalkreise vom Halbmesser f'g habend, so bewegt, daß er stets vertikal ist, und daß seine erweiterte Ebene beständig durch f' geht. Begreiflich kann man auch den Vertikalkreis a'e als Directionslinie und einen Horizontalkreis, der sein Centrum in der Vertikalen durch f' hat, stets horizontal bleibt und dessen Peripherie den Umfang jenes Kreises beständig schneidet, als Erzeugungslinie ansehen.

Die Projectionen h'b'i'd', h''b''i''d'' der Schattenlinie oder der Linie, in welcher der Ring von einer ihn umhüllenden cylindrischen Fläche berührt wird, deren Erzeugungslinie mit den Lichtstrahlen parallel ist, werden ganz wie in §. 199 bestimmt. Was dort die Projectionen der Linie gh sind, stellen hier die Projectionen a'f', a''f'' eines Lichtstrahles vor. Um z. B. die in k'l' liegenden Punkte k', l' zu erhalten, wird von der Projection a' irgend eines Punktes a des durch f' gehenden Lichtstrahls a'f', a''f'' auf k'l' die Senkrechte a'm gezogen, m nach n', und dieser Punkt in die durch a'' gehende Horizontale a''n'' nach n'' geführt, n''f'' und die damit parallele Tangente op'' gezogen, hierauf p' bestimmt und nach k' geführt, endlich f'l' = f'k'' gemacht. Der Punkt l' kann auch durch die mit f''n'' parallele Tangente rs erhalten werden. Die Vertikalprojectionen von k, l liegen in den durch p'', s gehenden Parallellinien mit der Basis. Die innere Schattenlinie, t'u'v'w', t''u''v''w'' wird auf dieselbe Art erhalten, wenn man die tangirenden Lichtstrahlen auf die innere Seite der kleinen Kreise in der

Vertikalebene zieht. Der Schlagschatten kann nun auch leicht construirt werden.

§. 284.

Sind die Lichtstrahlen nicht mit einander parallel, sondern gehen sie von einem Punkte aus, d. h. rührt die Beleuchtung nicht vom Sonnenlicht, sondern von Lampenlicht her; so müssen bei der Construction des Schattens alle Lichtstrahlen durch den bekannten leuchtenden Punkt gezogen, im Uebrigen aber muß ganz wie bisher verfahren werden. Der Schattenkörper ist demnach hier konisch, und wird durch eine konische Fläche bestimmt, welche den Schatten werfenden Körper umhüllt und berührt. Bei Körpern, die von Ebenen begrenzt werden, verwandelt sich diese konische Fläche in eine Pyramidenfläche, deren Berührungslinie sodann aus den Kanten zusammengesetzt ist, welche Schatten werfen. Man erkennt diese Kanten entweder unmittelbar, oder muß in zweifelhaften Fällen die Schatten der unsicheren Kanten construiren. Bei runden Körpern ergibt sich die Berührungslinie der konischen Umhüllungsfläche nach §. 193. 194.

Zwölfter Abschnitt.

Anwendung der geometrischen Constructionslehre auf die Perspective, oder kurze Anleitung zur Perspective.

§. 285.

In der geometrischen Constructionslehre werden die Gegenstände so dargestellt, als ob sich das Auge vertikal oberhalb eines jeden Punktes, oder, in Bezug auf

die Vertikalebene, senkrecht vor jedem Punkte des Gegenstandes befände. Die Perspective dagegen lehrt einen Gegenstand so auf einer Ebene darstellen, wie er dem Auge von einem bestimmten Standpunkte aus, seiner Form und Farbe gemäß erscheint, oder von demselben gesehen wird.

Mit der Form, d. h. mit der Zeichnung, welche den Umriß und die einzelnen Theile des Gegenstandes durch Linien darstellt, beschäftigt sich die Linearperspective, und zu dieser sollen in diesem Abschnitte die Grundzüge gegeben werden. Die Luftperspective dagegen beschäftigt sich mit der Farbe, d. h. sie berücksichtigt neben der eigenthümlichen Farbe des Gegenstandes auch die Veränderung, welche dieselbe durch die Entfernung, durch die Beleuchtung oder durch andere in der Nähe befindliche Gegenstände erleidet.

§. 286.

Um einen deutlichen Begriff von der perspectivischen Zeichnung eines Gegenstandes, z. B. eines Quadrates zu erhalten, stelle man sich vor, dasselbe befinde sich jenseits der als durchsichtig gedachten vertikalen Projectionsebene, das Auge aber vor derselben und nicht in der Ebene des Quadrates. Denkt man sich nun vom Auge nach den Ecken des Quadrates gerade Linien, Gesichtslinien, gezogen und ihre Durchschnitte mit der vertikalen Projectionsebene gehörig mit einander verbunden, so wird dadurch auf dieser Ebene ein Bild des Quadrates entstehen, das, von der Farbe abgesehen, in dem Auge den nämlichen Eindruck hervorbringt, als das Quadrat selbst. Dieses Bild nun ist die perspectivische Darstellung oder Zeichnung des Quadrates, sowie seine Seiten die perspectivischen Bilder der Seiten des Quadrates und seine Ecken, also

die Durchschnitte der Gesichtslinien mit der Vertikalebene, die Bilder der Ecken des Quadrates sind.

Hiernach lehrt daher die Linearperspective: an welcher Stelle der als durchsichtig gedachten vertikalen Projectionsebene und in welcher Größe und Form das vor dieser Ebene befindliche Auge einen hinter derselben befindlichen Gegenstand erblickt. Sind der Gegenstand und das Auge durch ihre Projectionen gegeben, so sieht man leicht ein, daß dieser Forderung mit Hülfe der darstellenden Geometrie ohne Schwierigkeit entsprochen werden kann. Man hat nämlich nur nöthig, die Durchschnitte der Gesichtslinien mit der Vertikalebene zu bestimmen und gehörig mit einander zu verbinden.

§. 287.

Es ist leicht einzusehen, daß das perspectivische Bild eines Gegenstandes stets kleiner, als der Gegenstand ist, und daß es, bei unverändertem Abstande des Auges von letzterem desto größer wird, je weiter sich die Vertikalebene vom Auge entfernt, oder je näher sich dieselbe am Gegenstande selbst befindet. Denn der Umriß des perspectivischen Bildes ist ja nichts anders, als der Durchschnitt einer Ebene mit einer pyramidenförmigen Fläche, deren Spitze sich im Auge befindet und deren Kanten die nach den äußersten Punkten des Gegenstandes gezogenen Gesichtslinien sind, oder welche den Gegenstand umhüllt. Solche Schnitte nehmen aber mit ihrer Entfernung von der Spitze zu. Denkt man sich das Auge unendlich weit entfernt und eine Gesichtslinie zugleich senkrecht auf die Vertikalebene, so können alle Gesichtslinien als parallel betrachtet werden; das Bild erhält alsdann die Ausdehnung des Gegenstandes und ist eine Projection desselben, wie wir sie in der darstellenden Geometrie kennen gelernt haben.

Da sich übrigens Lage und Größe des perspectivischen Bildes auf der Tafel bei einem und demselben Gegenstande mit der Lage des Auges, oder des Gegenstandes, oder auch mit der Stellung der Vertikalebene ändert, indem die Gesichtslinien immer eine andere Gesichtspyramide bestimmen, oder eine andere Stellung der Tafel einen andern Schnitt mit jener Pyramide zur Folge hat, so ist klar, daß sich kein perspectivisches Bild eines Gegenstandes entwerfen läßt, wenn nicht die Lage des Auges und des Gegenstandes in Bezug auf die Vertikalebene genau bestimmt sind.

§. 288. Erklärungen.

In der Perspective nennt man die horizontale Projectionsebene Grundebene; die vertikale Projectionsebene, welche man sich dabei durchsichtig wie eine Glastafel vorstellt, Tafel; den Durchschnitt beider Basis oder Grundlinie; die Vertikalprojection des Auges Augenpunkt, seine Horizontalprojection Fußpunkt des Auges; den Abstand des Auges von dem Augenpunkt Distanz, seine Entfernung vom Fußpunkt seine Höhe; eine durch das Auge senkrecht auf die Tafel gelegte vertikale Ebene Vertikalebene des Auges; ihren Durchschnitt mit der Tafel, also eine Senkrechte durch den Augenpunkt auf die Grundlinie Vertikallinie des Auges; eine durch das Auge mit der Grundebene parallel gelegte Ebene Horizontal- oder Horizontebene des Auges; ihren Durchschnitt mit der Tafel, also eine Parallele durch den Augenpunkt mit der Grundlinie, Horizontal- oder Horizontlinie; endlich die Punkte, welche auf dieser Linie erhalten werden, wenn man die Distanz vom Augenpunkt auf beiden Seiten aufträgt, Distanzpunkte.

Wenn demnach Fig. 91. PN die Grundebene, NO die Tafel und A das Auge vorstellt, so ist MN die Grundlinie, A'' der Augenpunkt, A' der Fußpunkt des Auges, AA'' die Distanz, AA' die Höhe des Auges, A''A' die Vertikalebene, A''C die Vertikallinie, DD die Horizontlinie und D, D sind die Distanzpunkte, wenn A''D = A''D = AA'' ist. Der Ort des Auges ergibt sich also, wenn man sich A''D in A'' senkrecht auf die Tafel errichtet denkt. Der Augenpunkt soll in der Folge immer mit A'' und die Distanzpunkte sollen mit D, D bezeichnet werden. Die Buchstaben, welche sich auf Projectionen beziehen, sind wie bisher markirt, denjenigen aber, welche zur Bezeichnung der perspectivischen Bilder dienen, ist rechts oben die Ziffer 2 beigefügt.

§. 289.

Da man Gemälde sehr bequem übersehen kann, wenn man sich ungefähr dreimal so weit davon entfernt befindet, als sie breit sind, so nimmt man bei perspectivischen Darstellungen in der Regel an, die Distanz, also die Entfernung des Auges vom Bilde, sei der dreifachen Breite desselben gleich. Überdieß befindet sich wohl auch das Auge in gewöhnlichen Fällen am natürlichsten vor der Mitte des Gegenstandes und der Augenpunkt in der Mitte des Bildes. Bei den hier vorkommenden Figuren ist jedoch diese Regel, theils der Deutlichkeit, theils der Mannichfaltigkeit wegen, nicht beobachtet worden.

§. 290.

So wie Horizont- und aufwärts verlängerte Vertikallinie die Tafel in vier Theile theilen, so wird der Raum jenseits der Tafel durch Horizont- und Vertikalebene, wenn man sie sich erweitert denke, in vier

Theile geschieden, welche jenen Theilen der Tafel entsprechen. Man sieht nun leicht ein, daß alle Punkte des Raumes jenseits der Tafel, welche in der Horizontalebene liegen, ihre Bilder in der Horizontallinie, alle Punkte der Vertikalebene ihre Bilder in der Vertikallinie haben, weil die zugehörigen Gesichtslinien in die Horizont- oder Vertikalebene fallen. Eben so liegen die perspectivischen Bilder von Punkten der erwähnten vier Raumtheile in den entsprechenden Theilen der Tafel und zwar der Horizont- und Vertikallinie desto näher, je näher sich die Punkte im Raum, bei übrigens gleicher Entfernung von der Tafel, an der Horizont- oder Vertikalebene befinden, oder je weiter sie, bei einerlei Abstande von diesen Ebenen, von der Tafel entfernt sind. Umgekehrt folgt hieraus, daß die Gegenstände im Raume bei einerlei Erhebung über die Grundebene desto entfernter sind, je näher ihre Bilder an der Horizontallinie liegen. Zugleich überzeugt man sich leicht, daß alle Gegenstände unter der Horizontalebene im Allgemeinen von oben, alle oberhalb dieser Ebene aber von unten gesehen werden; Gegenstände rechts oder links von der Vertikalebene sieht man von der Seite.

§. 291. Aufgabe.

Die Perspective des in der Grundebene hinter der Tafel liegenden Punktes b′ (Fig. 92.) zu bestimmen.

Es sei A′ der Fußpunkt oder die Horizontalprojection des Auges. Man ziehe die Gesichtslinie A′b′, A″b″ und bestimme nach §. 28 ihren Durchschnitt b^2 mit der Vertikalebene oder Tafel, so ist dieser Punkt die gesuchte Perspective (§. 286).

§. 292. Zusatz.

In dieser Auflösung verhält sich:

$$A'e : b'b'' = ec : cb'',$$

$$A''b^2 : b^2b'' = ec : cb'',$$

folglich auch $A''b^2 : b^2b'' = A'e : b'b''$.

Es theilt daher das perspectivische Bild b^2 die Vertikalprojection $A''b''$ der Gesichtslinie in zwei Theile, welche sich, vom Augenpunkt an gerechnet, verhalten, wie die Distanz zum Abstand des Punktes b' von der Tafel. Da nun die Linie $A''b''$ eben so getheilt wird, wenn man $b''f = b''b'$ macht und Df zieht, indem alsdann $A''b^2 : b^2b'' = (A''D = A''e) : (b''f = b''b')$ ist, so kann das Bild b^2 auf diese Art kürzer, als im vorigen §. gefunden werden. Eben so hätte man $b''b'$ von b'' rechts auf die Grundlinie tragen und den entstehenden Punkt f' mit dem Distanzpunkt links verbinden können; denn es ist $A''b^2 : b^2b'' = A''D : b''f' = A'e : b''b'$. Es ist also der Fußpunkt A' des Auges nicht nöthig.

Um ferner oberhalb der Grundlinie nicht zu viel Linien zu erhalten, wodurch leicht Undeutlichkeit entstehen würde, und weil auch diese letzte Auflösung die Lage des Punktes b' oberhalb ef' nicht erfordert, so gibt man die in Perspective zu setzenden Punkte gewöhnlich in der Grundebene vor der Tafel in der Art, als ob sie in diese Ebene umgelegt worden wären. Dadurch erhält man nun Fig. 93. statt Fig. 92.

§. 293. Aufgabe.

Das perspectivische Bild irgend eines im Raume befindlichen Punktes b (b', b'') zu bestimmen Fig. 94.

Man verfahre ganz wie in §. 291, d. h. man suche den Durchschnitt b^2 der Gesichtslinie $A'b'$, $A''b''$ nach §. 29 mit der Tafel, so ist er das gesuchte Bild.

§. 294. Zusatz.

Auch hier ist, wie in §. 292, die Vertikalprojection A''b'' der Gesichtslinie durch das Bild b^2 in zwei Theile $A''b^2$, b^2b'' getheilt, welche sich wie A'd : db' = A'e : b'f, also wie die Distanz zum Abstand des Punktes b hinter der Tafel verhalten. Ist man daher im Stande, diese Theilung auf einfachere Weise vorzunehmen, als es §. 293 geschehen ist, so kann die Aufgabe kürzer aufgelöst werden. Dieß geschieht z. B. wenn man den Abstand b'f des Punktes von der Tafel auf der Horizontlinie von D nach E trägt, und durch D eine Parallellinie Db^2 mit Eb'' zieht. Oder auch, indem man erst das Bild g der Horizontalprojection b' nach §. 291 oder §. 292 sucht und daselbst eine Senkrechte gb^2 bis zum Durchschnitt b^2 mit A''b'' zieht; denn es verhält sich nun $A''b^2 : b^2b'' = A''g : gf$ = ed : df = A'e : b'f. Endlich kann das gesuchte Bild b^2 auch gefunden werden, indem man durch b'' eine Parallellinie mit A''D zieht, darauf b''h = b'f macht, und h mit D verbindet; der Durchschnitt b^2 mit A''b'' ist nun das gesuchte Bild, weil A''b'' wie vorhin getheilt wird. Diese Auflösung ist offenbar mit der in §. 292 einerlei, wenn man sich durch den Punkt b im Raume gleichsam eine neue Grundebene gelegt denkt, wobei dann hi die neue Basis vorstellt.

Statt die Vertikalprojection b'' zu geben, trägt man gewöhnlich die Höhe des Punktes b über der Grundebene irgendwo neben, z. B. in hi, Fig. 94 auf, zieht durch i eine Parallele mit der Basis bis zum Durchschnitt mit der Senkrechten durch b' u. s. w. wie vorhin. Die ganze Auflösung stellt sich also nun wie in Fig. 95. dar, wo b' die nach vornen umgelegte Horizontalprojection des Punktes b im Raume und

hi seine Höhe über der Grundebene ist. Zeichnet man nach einem gewissen Maßstabe, so wird derselbe neben bei hi aufgetragen.

§. 295.

Obgleich die vorhergehenden Aufgaben, welche die Bestimmung des perspectivischen Bildes eines in der Grundebene oder sonst im Raume gegebenen Punktes lehren, zur Auflösung jeder andern Aufgabe strenge genommen hinreichen, indem man nur die Bilder einer hinreichenden Anzahl Punkte eines Gegenstandes gehörig mit einander zu verbinden braucht, um das Bild des ganzen Gegenstandes zu erhalten, so können doch folgende Sätze über die Lage der perspectivischen Bilder gewisser Linien nützlich werden und bisweilen Abkürzungen zulassen. Einige geometrische Sätze, welche gewöhnlich nicht in den Lehrbüchern der Geometrie vorkommen, gehen voraus; gewöhnliche geometrische Sätze aber sind nicht näher erwähnt.

§. 296. Lehrsatz.

Wenn eine Linie A mit zwei Ebenen B und C zugleich parallel ist, so ist sie es auch mit dem etwaigen Durchschnitte D derselben.

Denkt man sich durch die Linie A mit der Ebene B eine parallele Ebene E gelegt, so ist deren Durchschnitt mit der Ebene C, wie man leicht einsieht, sowohl mit A als mit D parallel, folglich auch A mit D gleichlaufend.

§. 297. Lehrsatz.

Wenn man durch einen Punkt A und jede von zwei Parallellinien B und C Ebenen legt, so schneiden sich diese beiden Ebenen in einer Linie D, welche durch A geht und mit B und C parallel ist.

Daß D durch A geht, ist für sich klar. Um auch den andern Theil des Satzes einzusehen, denke man sich beide Ebenen gelegt und außerdem noch durch die eine der Linien, z. B. durch B, eine Ebene E parallel mit der durch C gelegten, so werden diese beiden Parallelebenen durch die dritte vorhandene Ebene in Parallellinien geschnitten. Von diesen beiden Durchschnitten ist aber der eine die Linie D durch A; der andere die gegebene Linie B. Da nun D mit B, B aber mit C parallel ist, so ist auch D mit C gleichlaufend.

§. 298. Zusatz.

Der Lehrsatz des vorigen §. gilt auch für einen Punkt und mehrere Parallellinien, d. h. wenn durch jede von mehreren Parallellinien und einen Punkt Ebenen gelegt werden, so schneiden sich alle diese Ebenen in einer Linie, welche durch den gegebenen Punkt geht und mit den Parallellinien parallel ist. Um dieß einzusehen, braucht man nur zu erwägen, daß es sich mit je zwei Ebenen ganz wie im vorigen §. verhält und daß der gegebene Punkt allen Ebenen gemein ist.

§. 299. Lehrsatz.

Wenn mehrere durch eine Linie gelegte Ebenen durch eine Ebene geschnitten werden, so sind alle einzelne Durchschnitte entweder zugleich mit jener Linie parallel, oder schneiden dieselbe, bei hinreichender Verlängerung, alle zugleich in einem und demselben Punkte.

Ist erstens die schneidende Ebene mit der gemeinschaftlichen Linie der Ebene parallel, so gilt dieß auch von jeder Linie darin, die mit jener Linie in einer und derselben Ebene liegt; eine solche Linie ist aber

jeder der neuen Durchschnitte. Ist zweitens die schneidende Ebene nicht mit der gemeinschaftlichen Linie parallel, so muß sie dieselbe endlich schneiden und dieß kann nur in einem einzigen Punkte geschehen, weil eine Gerade von einer Ebene nur in einem Punkte geschnitten werden kann. Dieser Punkt gehört aber, wie die Linie, allen Ebenen zugleich an, mithin müssen auch die Durchschnitte aller erst gedachten Ebenen mit der schneidenden Ebene in ihm zusammen laufen.

§. 300. Lehrsätze.

1) Das Bild einer vertikalen, also auf der Grundebene senkrechten, Linie ist senkrecht auf der Basis.

Da nämlich die durch das Auge und die Linie im Raume gelegte Ebene, welche Gesichtsebene heißen soll, durch eine Vertikallinie gelegt ist, so ist sie selbst und mithin auch ihr Durchschnitt mit der Tafel, d. h. das fragliche Bild, vertikal; es liegt aber das Bild in der Tafel, daher ist es senkrecht auf der Grundlinie.

2) Die Bilder mehrerer vertikaler Linien sind unter sich parallel. Dieß ist eine Folge von Nr. 1.

3) Das Bild einer mit der Tafel parallelen Horizontallinie ist parallel mit der Basis und der Linie selbst.

Da die Linie mit der Grundebene und der Tafel parallel ist, so ist sie es auch mit deren Durchschnitt, nämlich mit der Grundlinie (§. 296). Nun ist das fragliche Bild der Durchschnitt der Gesichtsebene und der Tafel, mithin ist es mit der Basis und der Linie selbst parallel (§. 297).

4) Die Bilder mehrerer horizontaler, mit der Tafel paralleler Linien sind unter sich parallel. Folgt aus Nr. 3.

5) Die Bilder mehrerer Parallellinien, welche nicht die in Nr. 2 und 4. vorausgesetzte Lage haben, also weder vertikal, noch mit der Tafel und Grundebene parallel sind, laufen alle in einem und demselben Punkte der Tafel zusammen, und zwar in demjenigen Punkte, in welchem die Tafel von der durch das Auge mit den Linien im Raume parallel gezogenen Linie geschnitten wird.

Sämmtliche Gesichtsebenen schneiden sich nämlich in einer durch das Auge mit den Linien im Raume parallel gezogenen Linie (§. 298). Nun folgt die Wahrheit des Satzes unmittelbar aus dem Lehrsatze §. 299.

6) Der in Nr. 5. erwähnte Vereinigungspunkt der Bilder liegt:

a) In dem Augenpunkte, wenn die Linien im Raume senkrecht auf der Tafel sind.

b) In andern Punkten der Horizontallinie, wenn die Linien im Raume horizontal und nicht senkrecht auf der Tafel sind.

c) In der vertikalen Line durch denjenigen Punkt der Horizontallinie, in welchem die Bilder der Horizontalprojectionen der im Raume gegen Grundebene und Tafel geneigten Parallellinien zufolge b zusammen laufen.

Die Richtigkeit dieser Sätze ergibt sich auf folgende Weise.

Zu a. Da sämmtliche Linien senkrecht auf der Tafel sind, so ist dieß auch mit dem gemeinschaftlichen Durchschnitt aller Gesichtsebenen der Fall (§ 298). Da ferner dieser gemeinschaftliche Durchschnitt durch

das Auge geht, so ist der Augenpunkt sein Durchschnitt mit der Tafel und also der Vereinigungspunkt sämmtlicher Bilder (§. 299).

Zu b. Der gemeinschaftliche Durchschnitt aller Gesichtsebenen ist mit den Linien im Raume parallel (§. 298), mithin horizontal. Da nun die Linien nicht mit der Tafel parallel sind, so ist es auch jener Durchschnitt nicht und muß also die Tafel schneiden. Es kann aber eine durch das Auge gezogene Horizontallinie, wie der fragliche Durchschnitt ist, die Tafel nur in der Horizontlinie schneiden.

Zu c. Man denke sich den durch das Auge gehenden gemeinschaftlichen Durchschnitt der Gesichtsebenen der fraglichen Parallellinien, und ebenso den gemeinschaftlichen Durchschnitt der Gesichtsebenen ihrer Horizontalprojectionen, so liegen diese zwei Durchschnitte in einer und derselben vertikalen Ebene, weil die Linien, mit denen sie nach §. 298 parallel sind, nämlich jede Linie im Raume und ihre Projection, in dergleichen Ebenen liegen. Der Durchschnitt jener Vertikalebene mit der Tafel ist vertikal und enthält die Durchschnittspunkte mehrgedachter zwei Durchschnittslinien, d. h. die fraglichen zwei Punkte, in denen die Bilder zusammenlaufen. Da nun der Vereinigungspunkt der Bilder der Horizontalprojectionen in der Horizontlinie liegt (§. 300 b.), so ist der behauptete Satz richtig.

§. 301. Aufgabe.

Eine in der Grundebene liegende Linie oder ebene Figur in Perspective zu bringen.

Es sei in den Figuren 96, 97 und 98 A'' der Augenpunkt, D ein Distanzpunkt und ab die gegebene Linie, welche man sich, wie bereits in §. 292 erwähnt wurde, eigentlich in a'b' jenseits der Tafel zu denken hat. Man bestimme die Bilder a^2, b^2 der Endpunkte

der Linie ganz wie die des Punktes b′ §. 291. Dadurch wird a^2b^2 als Perspective erhalten.

In Fig. 99. sieht man die drei Linien aus Fig. 96, 97, 98 zu einem Dreieck verbunden; $a^2b^2c^2$ ist die Perspective, a′b′c′ aber die wahre Lage des Dreiecks aus der Lage abc hinter die Tafel in die Grundebene zurückgedreht. Es liegt also jeder der Punkte a, b, c eigentgrade so weit hinter der Tafel, als er gewöhnlich vor derselben gegeben wird. Wir wollen deßhalb die wahre Lage oberhalb der Grundlinie nicht mehr angeben.

Es versteht sich von selbst, daß auf dieselbe Weise jede in der Grundebene liegende Figur in Perspective gesetzt werden kann. Von einer krummlinigen Figur muß man die Bilder einer hinreichenden Anzahl Punkte bestimmen und gehörig mit einander verbinden. Fig. 100. gibt ein Beispiel von einer zusammengesetzten Gestalt; die Construction ergibt sich ganz wie oben bei dem Dreieck und eine Betrachtung der Figur zeigt dieß hinlänglich.

§. 302. Aufgabe.

Eine im Raume gegebene Linie oder ebene Figur in Perspective zu bringen.

Es sei a′b′ Fig. 101. die vor die Tafel umgeschlagene Horizontalprojection, a″b″ aber die Vertikalprojection einer im Raume gegebenen Linie ab; ferner sei A″ der Augenpunkt, D ein Distanzpunkt und df die Basis. Man suche die perspectivischen Bilder a^2, b^2 von a und b wie in §. 294, indem man also z. B. Dg = da′ macht, und Da^2 parallel mit ga″ bis zum Durchschnitt a^2 mit der Vertikalprojection A″a″ der Gesichtslinie Aa zieht. b^2 ist auf eine der anderen in §. 294 angegebenen Verfahrungsarten gefunden. So wird das Bild a^2b^2 erhalten. Verfährt man eben so mit dem Punkte c′, c″, so erhält

man die Perspective $a^2b^2c^2$ des im Raume befindlichen Dreiecks abc.

Auf ganz gleiche Art wird die Perspective jeder beliebigen geradlinigen Figur erhalten; von einer krummlinigen muß man aber die Bilder einer hinreichenden Anzahl Punkte gehörig mit einander verbinden. So stellt $a^2b^2c^2d^2$ Fig. 102. die Perspective eines quadratförmigen, horizontalen Deckenstücks mit eingeschriebenem Kreise in der Höhe a''b'' vor, welche Linie zugleich seine Vertikalprojection ist, während die Horizontalprojection nach a'b'c'd' vor die Tafel umgelegt erscheint. Man sieht hier zugleich, daß die Bilder a^2d^2, b^2c^2 von Linien ad, bc, welche auf der Tafel senkrecht sind, im Augenpunkt zusammen laufen (§ 300 Nr. 6 a.), so wie, daß die Bilder a^2b^2, c^2d^2 von Horizontalen, mit der Tafel parallelen Linien ab, cd mit der Basis parallel sind (§. 300 Nr. 4).

§. 303. Aufgabe.

Irgend einen Körper, z. B. einen auf der Grundebene stehenden Würfel in Perspective zu bringen.

Es sei abcd, Fig. 103, die in die Grundebene vor die Tafel umgelegte Horizontalprojection des Würfels und b''h'' seine Vertikalprojection. Man bestimme das Bild $a^2b^2c^2d^2$ der Grundfläche des Würfels nach §. 301. Was nun das Bild der obern Fläche betrifft, so könnten seine Eckpunkte nach §. 294 gefunden werden. Da aber die Bilder der vertikalen Kanten nach §. 300 Nr. 1 und 2. senkrecht auf der Grundlinie sind und von a^2, b^2, c^2, d^2 ausgehen, so können sie der Richtung nach gezogen werden. Ihre oberen Enden liegen in den Vertikalprojectionen A''e'', A''f'' rc. der betreffenden Gesichtslinien, ergeben sich also leicht als die Durchschnitte dieser Projectionen mit den Bildern der vertikalen Kanten in e^2, f^2, g^2, h^2. Der Punkt g^2

muß indessen nach §. 294 bestimmt werden, weil das Bild c^2g^2 der Kante cg in der Figur mit der Vertikalprojection A''g'' der Gesichtslinie nach dem Punkte g zusammenfällt. Man sieht hier zugleich, wie die Bilder von horizontalen Linien ab, cd, ef, gh, welche nicht auf der Tafel senkrecht und nicht mit ihr parallel sind, in einem Punkte i der Horizontallinie zusammen laufen (§. 300 Nr. 6 b.). Mit Berücksichtigung dieses Satzes hätten einige Punkte leichter bestimmt werden können, z. B. der Punkt g^2.

§. 304. Aufgabe.

Ein Zimmer in Perspective zu bringen.

Die Zeichnungsfläche stellt die Tafel vor. ab, Fig. 104, ist die Grundlinie, abcd der Grundriß des hinter der Tafel befindlichen Zimmers, abfe seine vordere Wand, also die Vertikalprojection des ganzen Zimmers. Dasselbe ist 20 Fuß lang, 15 Fuß breit, 12 Fuß hoch; der Augenpunkt A'' liegt in der Mitte 4' hoch und die Distanz ist 7½ Fuß. Die Bilder der vier auf der Tafel senkrechten Kanten verlaufen sich in A'' (§. 300 Nr. 6 a.) und da a, b, f, e die Bilder ihrer in der Tafel befindlichen Punkte sind, so liegen die Bilder dieser Kanten in A''a, A''b, A''f, A''e. Das Bild h eines Eckpunktes d ergibt sich nach §. 292, wenn man am = ad macht und Dm zieht. Nun wird hl senkrecht auf ab gezogen und die andern Kanten lk, ki, ih ergeben sich nun leicht (§. 300 Nr. 1 und 2). Die Decke ist in Felder, und zwar nach der Länge und Breite in drei getheilt. Denkt man sich die Theilung auf der Seitenwand rechts fortgesetzt, so ist (bn = ⅓bc), n der erste Theilungspunkt und n' sein Bild; die Senkrechte n'n'' gibt das Bild n'' des vordersten Theilungspunktes an der Decke, folglich ist n''o das Bild der ersten Theilungslinie; das der andern wird ebenso be-

stimmt. In der rechten Wand ist np, 3′ = br über dem Boden, ein 3′ breites, 5′ = rs hohes Fenster, dessen Seitenlinien man sich auch bis auf den Fußboden fortgesetzt denkt und nun die Bilder ihrer Fußpunkte ganz wie das Bild n′ bestimmt. Die Ecken des Fensters liegen nun in A″r und A″s (§. 300 Nr. 6a). In der Mitte der hinteren Wand, so wie an der linken Wand an der Stelle tu, sind 3′ breite, 6′ hohe Thüren, deren Bilder sich nach dem Bisherigen leicht ergeben. — Der Schüler zeichne diese Aufgabe nach den gegebenen Dimensionen in größerem Maßstabe.

§. 305.

So wie das perspectivische Bild sich aus den beiden Projectionen eines Gegenstandes bei bekanntem Augen- und Distanzpunkt bestimmen läßt, so kann auch umgekehrt aus dem perspectivischen Bilde und einer der Projectionen die andere unter denselben Voraussetzungen bestimmt werden, mithin auch die wahre Lage, Größe und Gestalt des Gegenstandes selbst. Daß aber die Perspective allein dazu nicht hinreicht, davon überzeugt man sich leicht, wenn man bedenkt, daß alle Punkte einer Gesichtslinie und alle Linien einer Gesichtsebene nur ein einziges perspectivisches Bild haben. Bei Körpern verhält es sich nicht anders, denn denken wir uns z. B. eine konische Fläche als Umhüllungsfläche einer Reihe von Kugelflächen, so ist ihr Durchschnitt mit der Tafel das perspectivische Bild aller umhüllten Kugelflächen und es ist also durch dieses Bild allein keine dieser Kugelflächen bestimmt.

§. 306. Aufgabe.

Aus dem perspectivischen Bilde eines Punktes, einer Linie oder eines Körpers und einer Projection dieses Gegenstandes die andere Projection und mithin auch den Punkt, die Linie oder den Körper im Raume selbst

zu bestimmen, vorausgesetzt, daß Augen- und Distanzpunkt bekannt sind.

Es sei A'', Fig. 105, der Augenpunkt, D der Distanzpunkt, a^2 das perspectivische Bild und a'' die Vertikalprojection des Punktes. Der Fußpunkt A' des Auges ergibt sich aus A'' und A''D (§. 288). Man ziehe die Vertikalprojection A''a^2a'' der Gesichtslinie. Da a^2 der wahre Durchschnitt dieser Linie mit der Tafel ist, so geht die Horizontalprojection A'a' derselben durch die Horizontalprojection c von a^2, und da sie auch durch A' geht, so kann sie gezogen werden. In ihr liegt die Horizontalprojection des gesuchten Punktes, welche man daher in a' durch die Senkrechte von a'' auf die Basis als Durchschnitt erhält.

Es ist augenscheinlich, wie man verfahren muß, wenn statt der Vertikalprojection a'' die Horizontalprojection a' gegeben wäre.

Ist von einer Linie wie a''b'', a^2b^2 die Rede, so verfährt man mit ihrem andern Endpunkt eben so. Für einzelne Punkte von krummen Linien oder von Körpern gilt dasselbe, wie denn überhaupt das Verfahren grade das Umgekehrte von dem bei der Bestimmung des perspectivischen Bildes befolgten ist.

§. 307. Zusatz.

Will man bei dieser Auflösung mit Hülfe des Distanz- und Augenpunktes das umgekehrte Verfahren von §. 294 anwenden, so ist dieß ebenfalls sehr leicht. Ist z. B. A'', D, a^2 und a'' Fig. 106 gegeben, so zieht man a''c parallel mit der Grundlinie bd, sodann Da^2c, fällt hierauf die Senkrechte a''b auf die Grundlinie und macht ba' = a''c, so ist a' die gesuchte Horizontalprojection des Punktes, dessen Vertikalprojection a'' und dessen Perspective a^2 ist. Ist A'', D, a' und a^2 bekannt, so fällt man die Senkrechte a'b auf db, macht bd = ba', errichtet in d

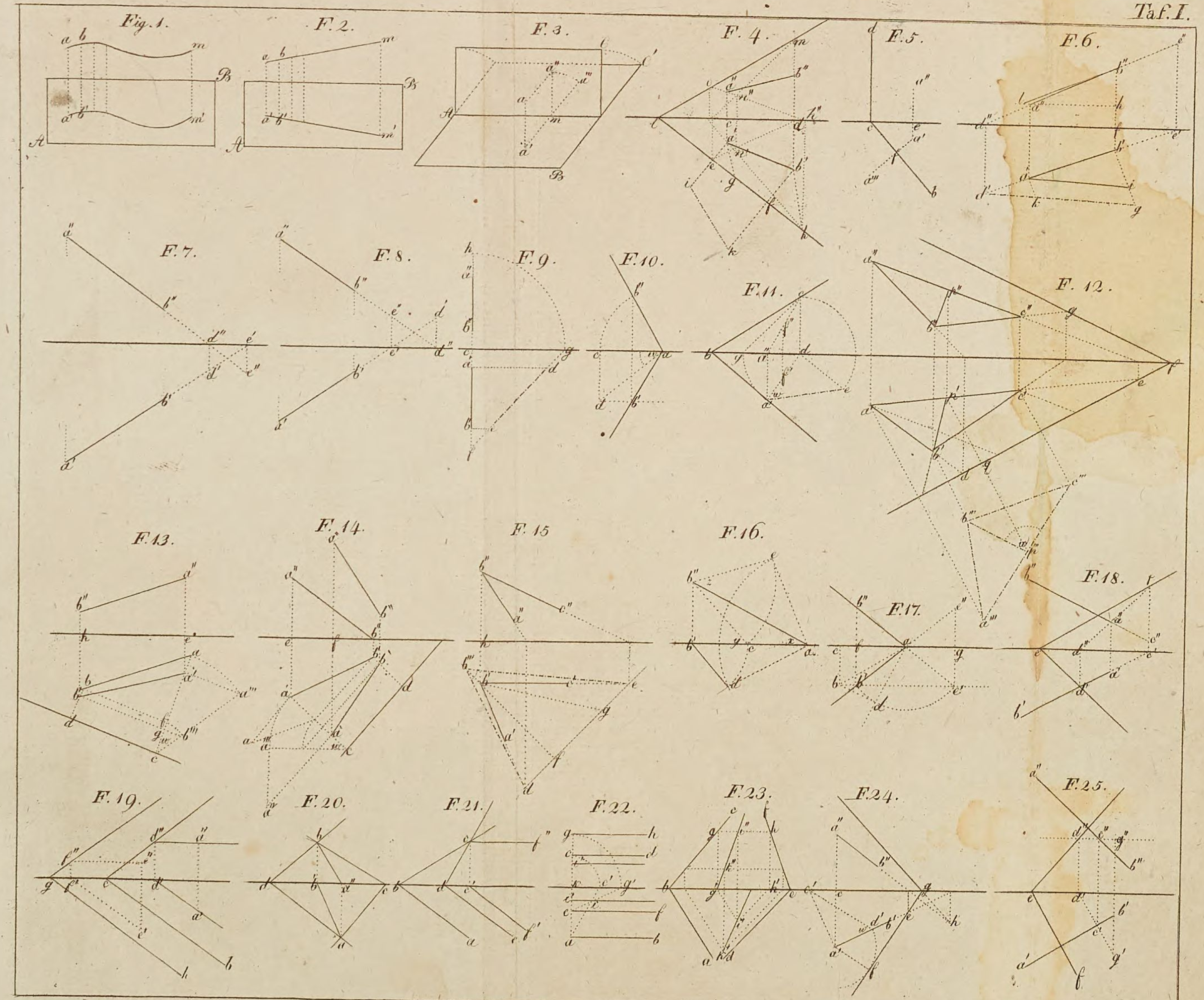
ein Perpendikel auf bd bis zum Durchschnitt c mit der verlängerten Linie Da^2 und zieht endlich durch c eine Parallele mit bd, so erhält man dadurch a'' in a'b.

§. 308. Schluß.

Diese Anleitung zur Linearperspective wird, wie wir glauben, hinreichen, Anfänger in den Stand zu setzen, viele Aufgaben auflösen und ausführlichere Werke über Perspective gründlich und mit Nutzen studiren zu können. In Bezug auf den Schatten in perspectivischen Zeichnungen bemerken wir nur noch, daß man erst den geometrischen Schatten nach dem 11. Abschnitte zu construiren und diesen Schatten dann, gleich jeder andern Fläche, in Perspective zu bringen hat.

Berichtigungen.

Seite 26.	Zeile 18.	v. o.	lies	n′, n″	statt	n, n′
— 63.	— 12.	—	—	cf	—	ce.



Durch Susemihl & Sohn in Darmstadt

Emilie Susemihl sc.

Taf. II

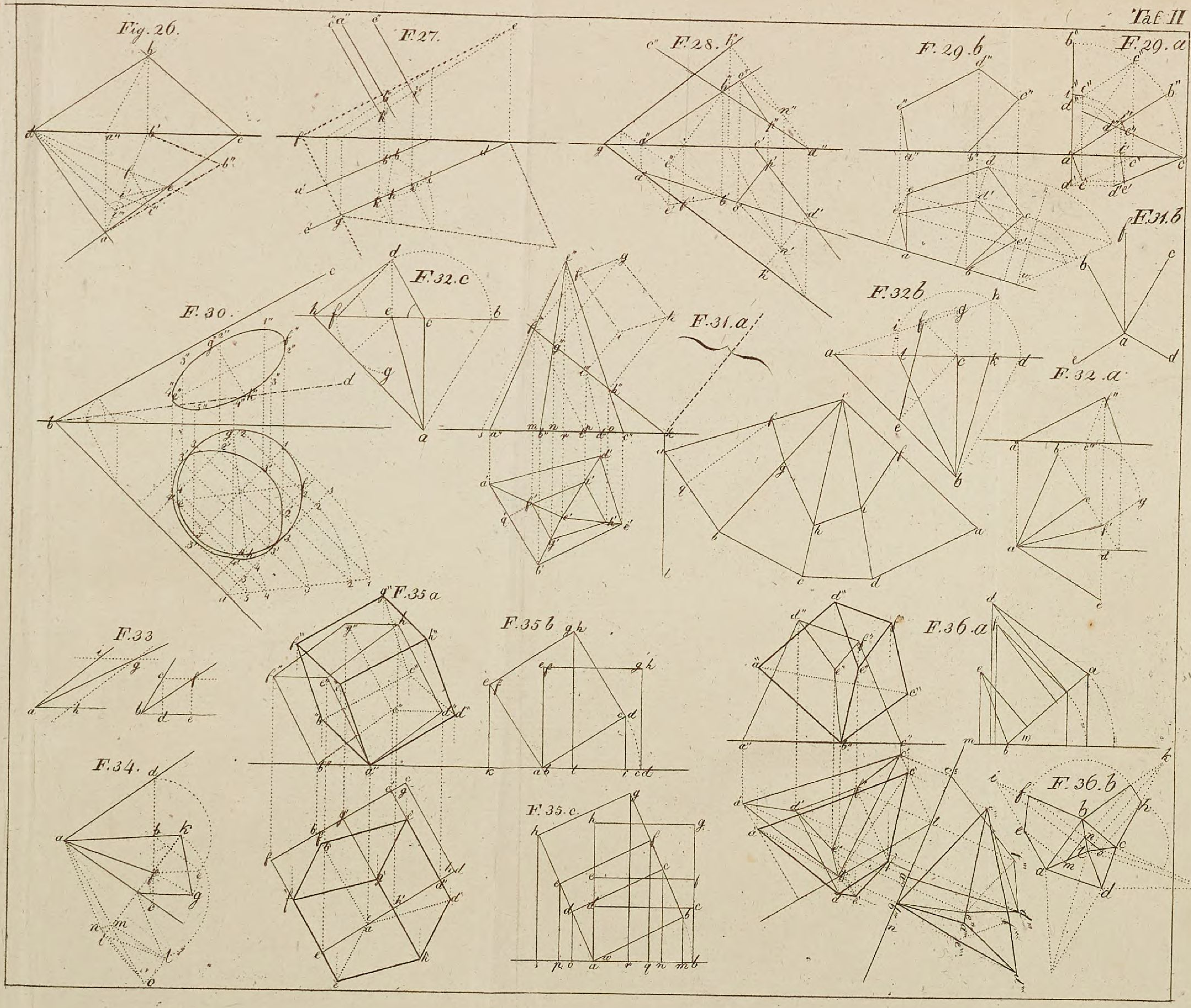
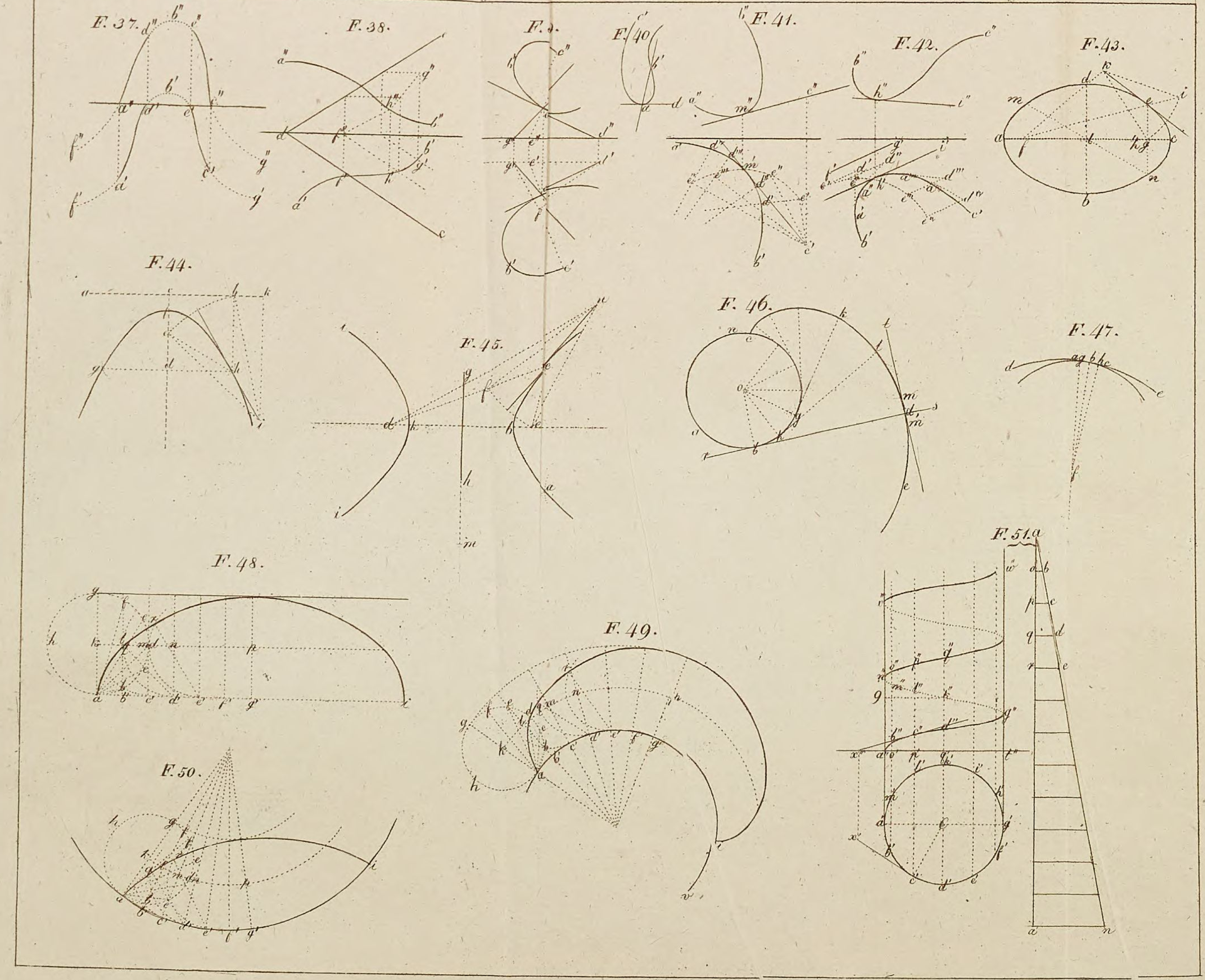


Fig. 26.
F. 27.
F. 28.
F. 29. b
F. 29. a
F. 30.
F. 32. c
F. 31. a
F. 32 b
F. 31. b
F. 32. a
F. 33
F. 35 a
F. 35 b
F. 36. a
F. 34.
F. 35. c.
F. 36. b

T. III.



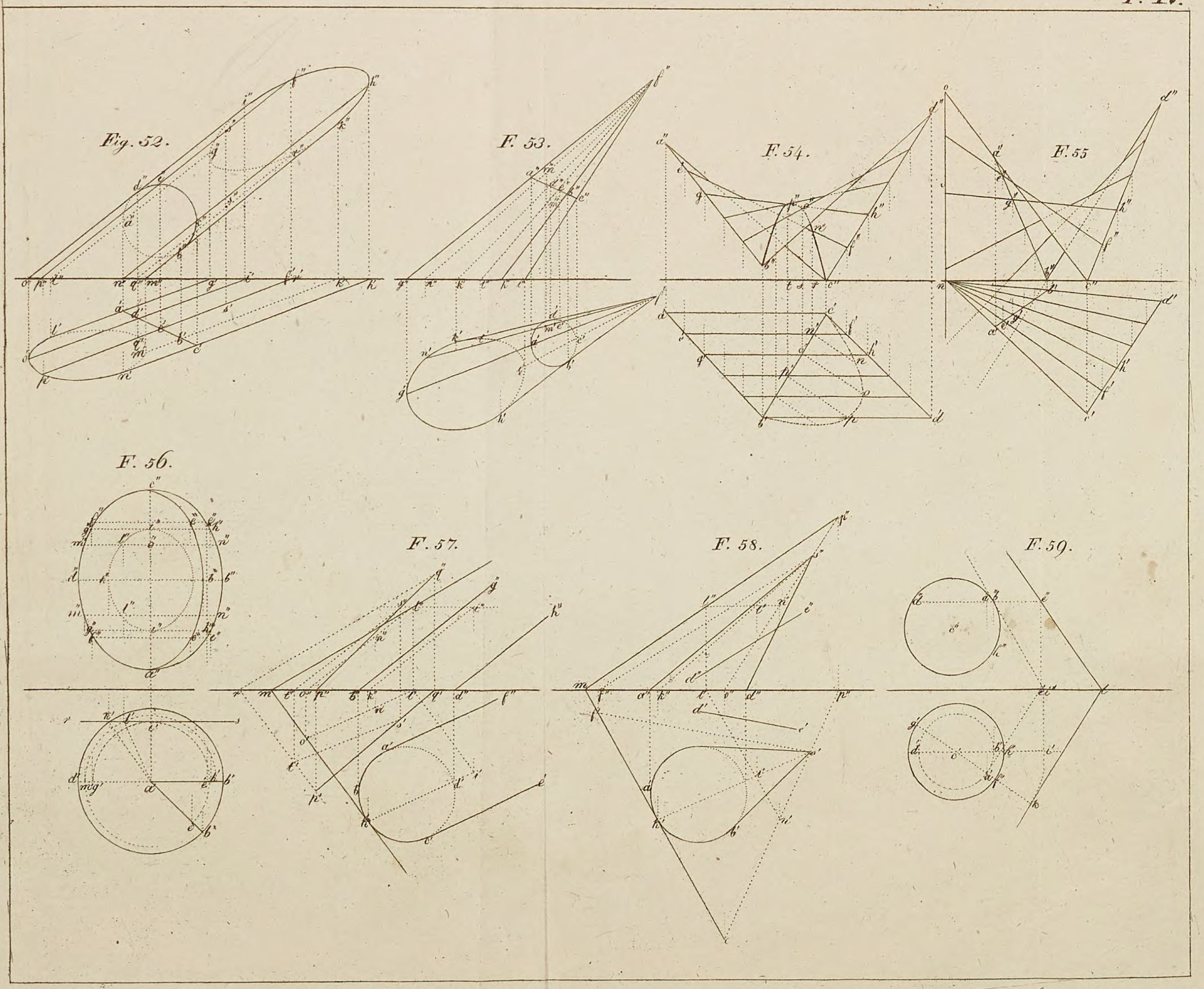
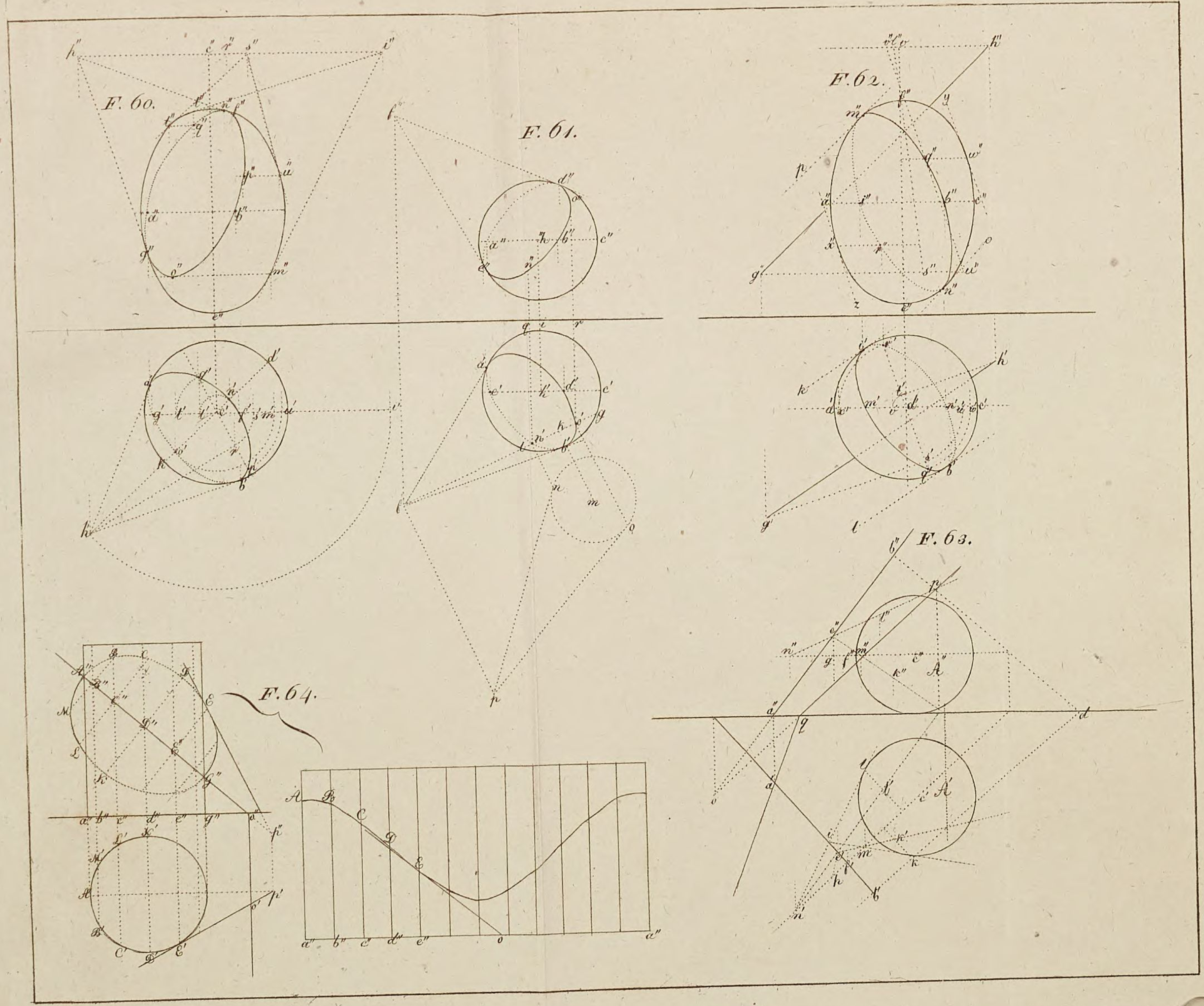
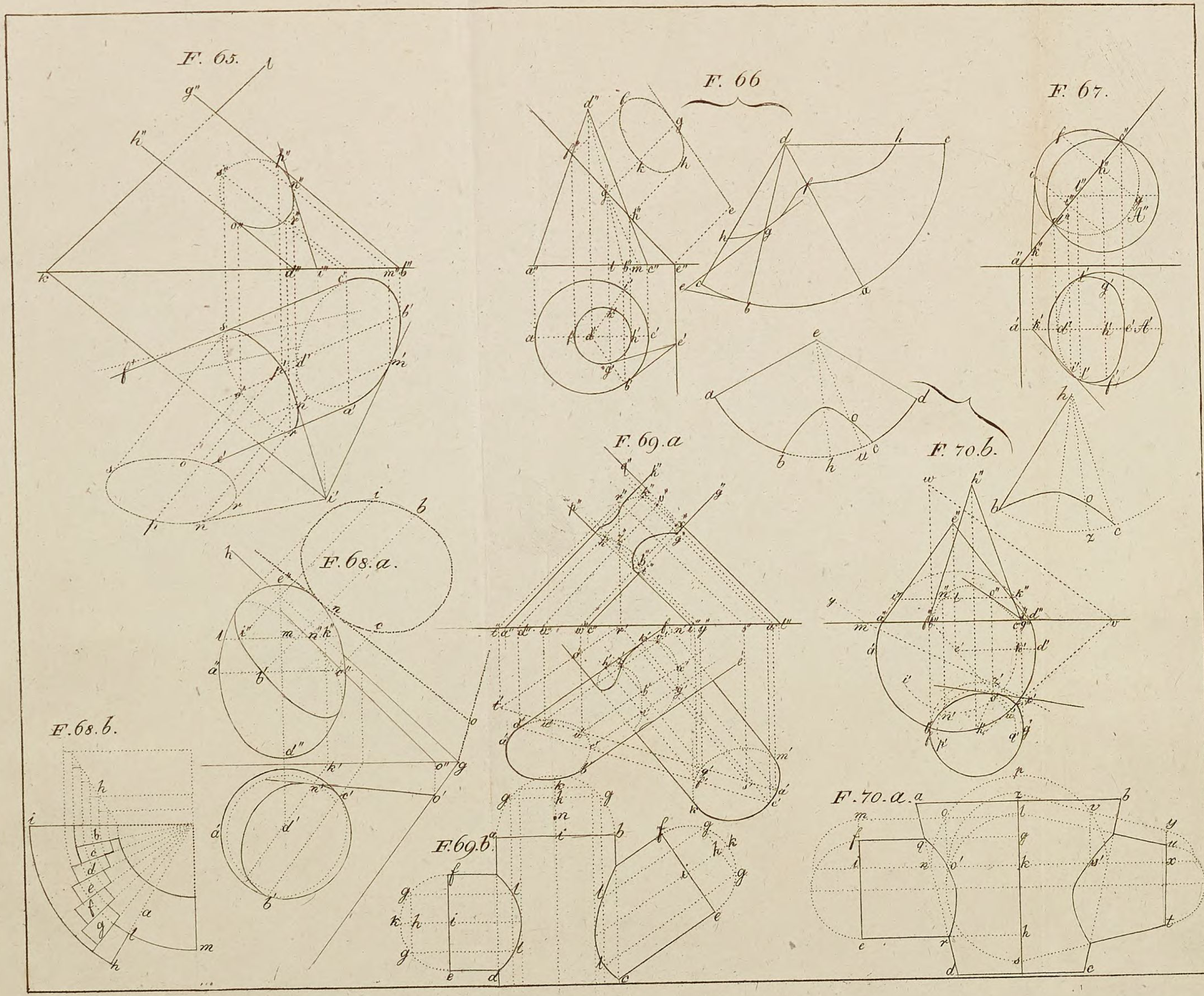
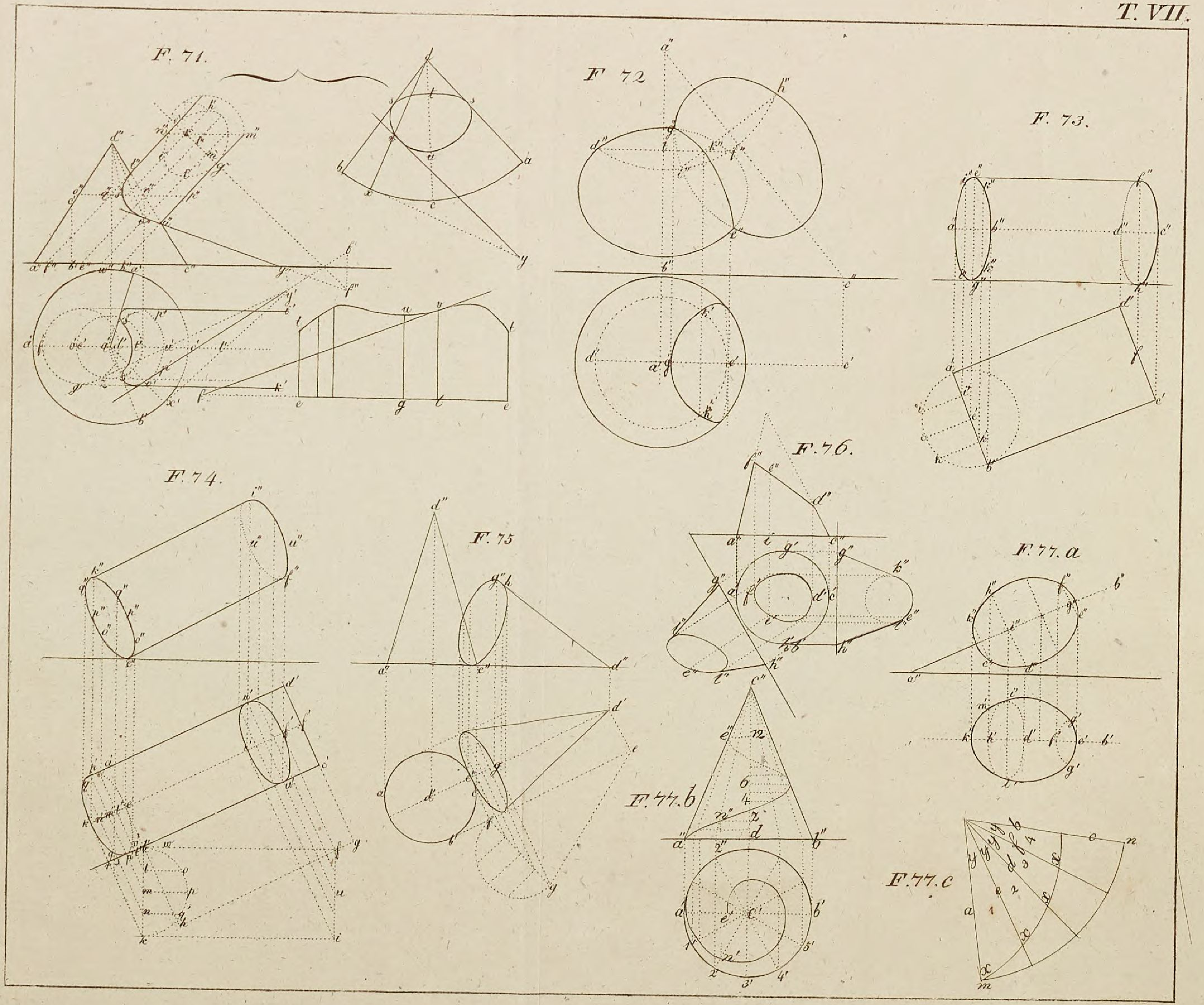


Fig. 52.
F. 53.
F. 54.
F. 55
F. 56.
F. 57.
F. 58.
F. 59.


F. 60.
F. 61.
F. 62.
F. 63.
F. 64.

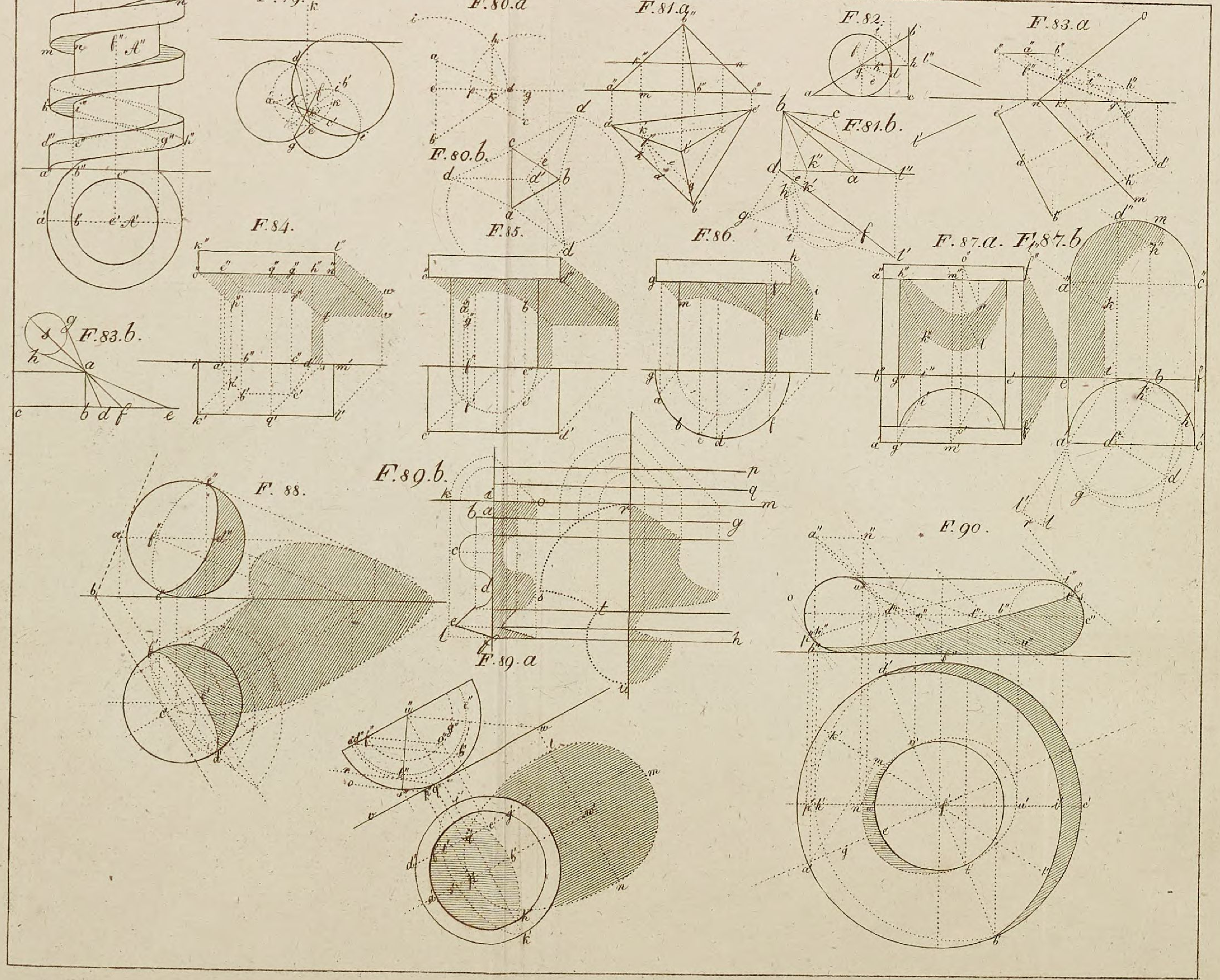
T. VI.

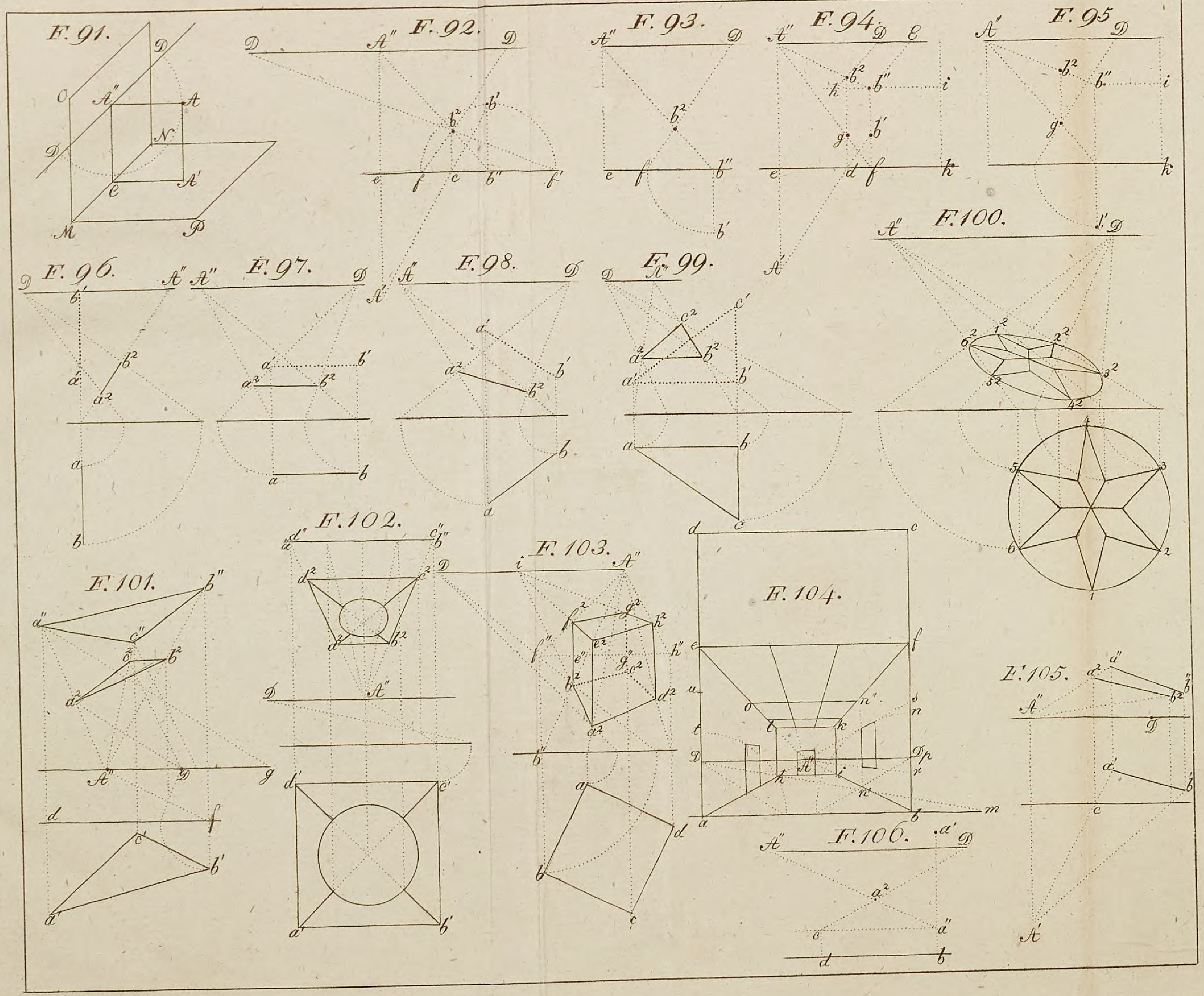




F. 71.
F. 72
F. 73.
F. 74.
F. 75
F. 76.
F. 77. a
F. 77. b
F. 77. c

T. VIII.


F.78.
F.79.
F.80.a
F.81.a.
F.82.
F.83.a
F.80.b.
F.81.b.
F.83.b.
F.84.
F.85.
F.86.
F.87.a.
F.87.b
F.88.
F.89.b.
F.89.a
F.90.


F. 91.
F. 92.
F. 93.
F. 94.
F. 95
F. 96.
F. 97.
F. 98.
F. 99.
F. 100.
F. 101.
F. 102.
F. 103.
F. 104.
F. 105.
F. 106.

Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Schaffnit, Georg

Geometrische Constructionslehre oder darstellende Geometrie Geometrie descriptive

Darmstadt 1837

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.152-c
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739978-9